


Turbopompe & C.
(per la serie di Ingegneria Totale)
ver. 1.4

Marco Venturini Autieri 

Giugno 1999

Indice

1	Equazioni di Bilancio	1
1.1	Massa — Equazione di Continuità	1
1.2	Quantità di Moto	2
1.2.1	Equazione di Navier-Stokes	2
1.3	Energia	2
1.4	Entalpia Totale	2
1.5	Sistemi Aperti — Flussi Stazionari	3
2	L'Equazione di Eulero	3
3	Compressori Assiali	5
3.1	Forze sulle Palettature di una Pompa Assiale	7
3.2	Equilibrio Radiale nelle Macchine Assiali	9
3.2.1	Vortice Libero	10
3.2.2	Vortice Forzato	10
4	I Compressori Radiali	11
4.1	Similitudini per Turbopompe Radiali	13
4.2	Pompe Geometricamente Simili	13
5	Le Perdite	15
5.1	Perdite di Diffusione	16
5.2	Valutazione Sperimentale dei Coefficienti di Perdita	17
6	Analisi Dimensionale	18
	Riferimenti bibliografici	19

1 Equazioni di Bilancio

1.1 Massa — Equazione di Continuità

Se V è un generico volume di controllo:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{forma euleriana}) \quad (1)$$

*Questo documento è stato realizzato in L^AT_EX. Una versione correntemente aggiornata può essere reperita su <http://131.114.29.9/%7Es180339/>. Può essere distribuito liberamente, purché in modo integrale. L'autore è reperibile per e-mail a s180339@studenti.ing.unipi.it e a sysop@f617.n332.z2.fidonet.org.

siccome V è arbitrario e le funzioni delle proprietà dei materiali sono sufficientemente regolari:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{forma di divergenza}) \quad (2)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (\text{forma convettiva}) \quad (3)$$

1.2 Quantità di Moto (Momentum)

Per la i -sima componente, in forma euleriana:

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \oint_S \rho u_i \vec{u} \cdot d\vec{S} = F_i = \int_V \rho f_i dV - \oint_S p n_i dS + \oint_S \vec{\tau}_i \cdot \vec{n} dS \quad (4)$$

(\vec{f} è la forza di volume per unità di massa; $\vec{\tau}_i$ è il vettore sforzo viscoso)

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} - \vec{\nabla} p \quad (\text{forma convettiva}) \quad (5)$$

($\vec{\tau}$ è il tensore degli sforzi viscosi)

1.2.1 Equazione di Navier-Stokes

Con le equazioni costitutive, la (5) diventa la (6):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} \quad (6)$$

che si espande, per la generica componente i -sima, in:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right) \quad (7)$$

1.3 Energia

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial [\rho (e + \vec{u}^2/2)]}{\partial t} dV + \oint_S \rho (e + \vec{u}^2/2) \vec{u} \cdot d\vec{S} = \\ = \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dV - \oint_S p \vec{n} \cdot \vec{u} dS + L_\tau + Q \end{aligned} \quad (8)$$

(L_τ è il lavoro delle forze viscosi; Q è il calore introdotto dall'esterno)

1.4 Entalpia Totale

Un bilancio dell'entalpia ($h_t = h + \vec{u}^2/2$) non dà più informazioni di un bilancio dell'energia.

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial [\rho (h + \vec{u}^2/2)]}{\partial t} dV + \oint_S \rho (h + \vec{u}^2/2) \vec{u} \cdot d\vec{S} = \\ = \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV + \int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{u} dV + L_\tau + Q \end{aligned} \quad (9)$$

Dalla (9) si vede che l'entalpia totale può cambiare solo in conseguenza a:

- pressione che cambia nel tempo ($\frac{\partial p}{\partial t} \neq 0$);

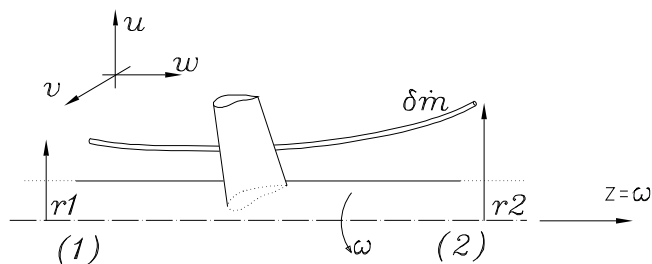


Figura 1: Ecco quel che accade a un filetto fluido di portata $\delta\dot{m}$ che, passando da (1) a (2), viene lavorato dal rotore — confronta la figura a pag. 191 di [3].

- dissipazione viscosa (L_τ);
- flusso di calore (Q);
- lavoro (potenza) delle forze di massa ($\rho \vec{f} \cdot \vec{u} \neq 0$).

Nel caso di un flusso non viscoso, adiabatico e senza forze di massa si ottiene l'equazione (10) che governa lo studio dei compressori:

$$\boxed{\rho \frac{Dh_t}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t}} \quad (10)$$

i quali, anche se a una prima considerazione “a scatola nera” (flussi entrante e uscente costanti nel tempo) possono sembrare stazionari, non lo sono affatto e, proprio come le macchine alternative, non sono stazionarie (localmente); infatti le pale girano ed alternativamente investono zone diverse del flusso.

1.5 Sistemi Aperti — Flussi Stazionari

La definizione di flusso stazionario¹ richiede che tutte le proprietà in ciascun punto del sistema rimangano costanti nel tempo. Questo vuol dire che il flusso di massa in ciascuna sezione dove la materia attraversa i confini del sistema resta costante, che il flusso di massa netto attraverso i confini è nullo, che il volume del sistema resta costante e che tutte le interazioni (calore e lavoro) con l'esterno avvengono a velocità costante.

In tali condizioni, il primo principio della termodinamica diventa (derivando direttamente dall'eq. 9):²

$$\dot{Q} + \dot{L} = \dot{m} (h_{t,out} - h_{t,in}) \quad (11)$$

ovvero

$$q + l = h_{t,out} - h_{t,in} \quad (12)$$

(s'è seguita la convenzione di considerare positivo il lavoro fatto sul sistema).

2 L'Equazione di Eulero

Desiderio: le palette debbono cambiare l'entalpia totale del flusso. Con riferimento all'equazione (10), l'entalpia totale del fluido, e con essa la pressione totale, può essere modificata soltanto tramite una compressione o una espansione non stazionaria. Inoltre, dall'equazione si vede che, per aumentare l'energia del fluido, la pressione deve necessariamente aumentare.³ Osserviamo che l'energia (l'entalpia) del fluido, che include la parte cinetica, si riferisce al

¹Qui si parla di stazionarietà globale; questa non è in contrasto con la non-stazionarietà locale richiesta dall'equazione (10).

²Vengono trascurati i contributi gravitazionali.

³Al contrario, in una turbina l'energia del fluido diminuisce e con essa la pressione.

sistema di riferimento nel quale esiste la dipendenza dal tempo (la non stazionarietà); pertanto, un flusso che è stazionario relativamente al rotore può modificare l'energia del fluido relativamente al riferimento fisso.⁴

Una coppia elementare $\delta\tau$ provoca la seguente variazione di momento angolare nel filetto fluido di fig. 1:⁵

$$\delta\tau = \delta\dot{m}(r_2v_2 - r_1v_1)$$

Con riferimento alla (11), la potenza da dare alla macchina è:

$$\omega \delta\tau = \omega \delta\dot{m}(r_2v_2 - r_1v_1) = \omega \delta\dot{m} \Delta(rv) = \delta\dot{m}(h_{t2} - h_{t1}) \quad (13)$$

che si riassume nella:

$$\boxed{\Delta h_t = \omega \Delta(rv)} \quad (14)$$

Essendo:

$$\begin{aligned} de &= T ds - p d\frac{1}{\rho} \\ h &\triangleq e + p\frac{1}{\rho} \\ dh &= de + \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2}d\rho = de + \frac{dp}{\rho} + p d\frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

è, mettendo insieme:

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho} \quad (15)$$

Notando che, per definizione di grandezza *totale*,⁶ l'entropia totale coincide con l'entropia stessa ($ds = ds_t$), la (15) può scriversi:

$$dh_t = T_t ds + \frac{dp_t}{\rho_t} \quad (16)$$

dove s'è posto $p_t = p + \frac{1}{2}\rho V^2$.

La (16) diventa, per macchine perfette ($ds = 0$) e per fluidi incomprimibili ($\rho = \rho_t$):⁷

$$dh_t = \frac{dp_t}{\rho_t} \quad (17)$$

La (17) e la (14) insieme danno la:

$$\frac{\Delta p_t}{\rho} = \omega \Delta(rv) \quad (18)$$

ovverosia, essendo $\Delta p_t = \Delta p + \frac{1}{2}\rho\Delta V^2$ e $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$:

$$\boxed{\frac{\Delta p}{\rho} = -\Delta \left(\frac{u^2 + v(v - 2\omega r) + w^2}{2} \right)} \quad (19)$$

⁴A proposito, vedi [3] a pag. 189.

⁵Confronta la pag. 280 di [1].

⁶Il valore totale di una grandezza è quel valore che il fluido assume dopo che è stato portato *isoentropicamente* a riposo.

⁷Guarda a pag. 622 di [1].

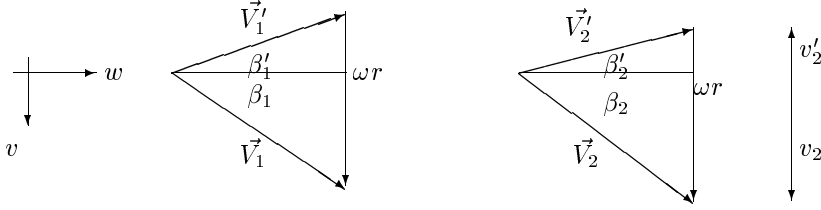


Figura 2: I moti radiali vengono trascurati ($u = 0$) — $\vec{V} = (v, w)$ è la velocità assoluta — $\vec{V}' = (v, w)$ è la velocità relativa — Gli angoli β sono definiti positivi e misurati dalla direzione assiale. Tra i due triangoli delle velocità, c 'è il rotore.

detta *equazione di Eulero*. L'equazione di Eulero è un'equazione *energetica* che mette in relazione il campo cinematico con il salto di pressione totale o di entalpia totale.

Invece, per un fluido comprimibile, perfetto, con c_p costante che passa attraverso una macchina perfetta ($ds = 0$), essendo:

$$dh_t = c_p dT_t \qquad \Delta h_t = c_p \Delta T_t \qquad (20)$$

l'equazione di Eulero diventa (combinando la (14) e la (20)):

$$\boxed{c_p(T_{t2} - T_{t1}) = \omega \Delta(rv)} \qquad (21)$$

Normalizzando rispetto a T_t il salto di temperatura:

$$\frac{T_{t2}}{T_{t1}} = 1 + \frac{\omega}{c_p T_{t1}} (r_2 v_2 - r_1 v_1) \qquad (22)$$

il salto di pressione totale può trovarsi facilmente ricordando che:

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}} = \left(\frac{T_{t2}}{T_{t1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

3 Compressori Assiali

Una “pompa” tratta i fluidi incompressibili (liquidi) ed è tesa ad aumentarne la sola pressione; un “compressore” tratta i fluidi comprimibili (gas) e l'approssimazione di densità costante non ha senso.

Un profilo alare isolato (l'ala di un aeroplano, ad esempio) non influenza il flusso “all'infinito” (la direzione a valle è uguale a quella a monte, sufficientemente lontano dal profilo). Al contrario, il campo su cui opera una schiera di un compressore è finito e ciascuna schiera è “vista” dal flusso come una serie infinita di pale: una schiera ruota un flusso fino all'“infinito”. L'angolo di deviazione (angolo tra la direzione del flusso in uscita e la direzione tangente al bordo di uscita del profilo) è piccolo per flussi non stallati.

Nelle turbomacchine si assume noto il campo di velocità in ingresso, dopodich quello in uscita viene determinato con i triangoli di velocità (fig. 2).

In prima approssimazione (eventualmente si può iterare con valori diversi della densità) i triangoli hanno uguale estensione assiale ($w_1 = w_2$) perché si considera il caso di ρA costante⁸ (in un compressore A diminuisce e ρ aumenta).

Dalla figura si osserva che:

$$v_1 = w_1 \tan \beta_1 \qquad (w_1 \text{ è noto se è nota la portata}) \qquad (23)$$

$$v_2 = \omega r_2 - w_2 \tan \beta_2' \qquad (w_2 \tan \beta_2' = v_2') \qquad (24)$$

⁸La portata $\rho A w$ è pure ovviamente costante.

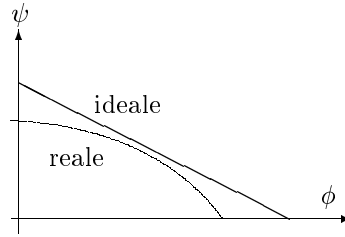


Figura 3: Caratteristiche ideale e reale di un compressore

Inserendo la (23) e la (24) nella (22) riscritta così:

$$\frac{c_p(T_{t2} - T_{t1})}{\omega^2 r_2^2} = \frac{r_2 v_2 - r_1 v_1}{\omega r_2^2} = \frac{v_2}{\omega r_2} - \frac{r_1 v_1}{\omega r_2^2}$$

si ottiene:⁹

$$\frac{c_p(T_{t2} - T_{t1})}{\omega^2 r_2^2} = \left[1 - \frac{w_2}{\omega r_2} \left(\tan \beta'_2 + \frac{w_1 r_1}{w_2 r_2} \tan \beta_1 \right) \right] \quad (25)$$

Si definiscono innanzitutto due quantità:

- il coefficiente di lavoro, che normalizza l'incremento entalpico:

$$\psi \triangleq \frac{c_p(T_{t2} - T_{t1})}{\omega^2 r_2^2}; \quad (26)$$

- il coefficiente di flusso, che è legato direttamente alla portata:

$$\phi \triangleq \frac{w_2}{\omega r_2}. \quad (27)$$

In merito alla (25), si osserva poi che

- $\frac{w_1 r_1}{w_2 r_2} \approx 1$;
- β_1 è noto se sono note le condizioni d'ingresso;
- $\psi = 1 - \phi(\tan \beta'_2 + \tan \beta_1)$.

La caratteristica reale di un compressore (guarda la fig. 3) dipende dalle condizioni di impiego (ρ , c_p) e da effetti viscosi, tutto scalato opportunamente col numero di Reynolds $Re = \frac{\omega r_2^2}{\nu}$. Tuttavia di solito in una turbomacchina si supera sempre $Re = 10^6$ (il flusso è pressoché interamente turbolento “sùbito” — temporalmente e spazialmente), pertanto aumentando Re la turbolenza non ne risente apprezzabilmente perché essa è già completa.¹⁰ L'incidenza principale di Re è relativa alla viscosità, che ovviamente è data se è dato il problema fisico reale. *Pertanto, una volta trovata la caratteristica reale di un compressore, essa non varia se cambia il numero di giri al minuto.*

- Potenza del fluido: $P_f = \dot{m} \Delta h_t$
- Potenza sull'albero, owerosia potenza da pagare (compressore) o ottenuta (turbina): $P_s = \tau \omega$
- Per una pompa, l'effetto utile è P_f : $\eta_p = P_f / P_s$
- Per una turbina, l'effetto utile è P_s : $\eta_t = P_s / P_f$

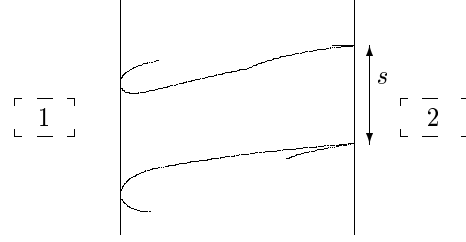


Figura 4: La superficie di controllo per il bilancio della quantità di moto (cfr l'eq. (4))

3.1 Forze sulle Palettature di una Pompa Assiale

Con riferimento alla fig. 4, si può calcolare la forza (assiale F_z ¹¹ e circonferenziale F_θ) agente sulle pale scegliendo come volume di controllo quello delimitato a destra e a sinistra da due sezioni 1 e 2 (sufficientemente distanti da poter trattare con un flusso medio), sopra e sotto dall'intradosso e dall'estradosso di due palette.

È innanzitutto, dalla (1), per ciascun elemento dr :

$$\rho_2 w'_2 s \approx \rho_1 w'_1 s \quad (28)$$

In prima approssimazione riterremo il fluido incomprimibile ($\rho_1 \approx \rho_2$); di conseguenza $w'_1 = w'_2$. In seconda approssimazione si potrà procedere iterativamente modificando il valore della densità. Inoltre, di solito in fase di progetto si cerca di avere w uniforme in senso radiale, per evitare che, ad esempio vicino all'*hub*, w diventi negativo (inversione del flusso), pur mantenendo su tutta l'altezza della palette complessivamente la portata richiesta.

Il bilancio di quantità di moto lungo z è:

$$(\rho_2 w'_2 s) w'_2 - (\rho_1 w'_1 s) w'_1 = (p_1 - p_2) s - F_z$$

che diventa, per un fluido incomprimibile:

$$(p_1 - p_2) = F_z s \quad (29)$$

Lungo θ è:

$$(\rho_2 w'_2 s) v'_2 - (\rho_1 w'_1 s) v'_1 = -F_\theta$$

che, con l'approssimazione della (28), diventa:

$$F_\theta = \rho_1 w'_1 s (v'_1 - v'_2) \quad (30)$$

Per una macchina assiale non c'è variazione di entalpia totale nel riferimento rotorico ($\Delta h'_t = 0$), pertanto non c'è nemmeno variazione di pressione totale p'_t :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 (u'^2_1 + v'^2_1 + w'^2_1) = p_2 + \frac{1}{2} \rho_2 (u'^2_2 + v'^2_2 + w'^2_2)$$

e, poiché $w'_2 \approx w'_1$ e $u'_1 \approx u'_2 \approx 0$:

$$p_1 - p_2 \approx \frac{\rho}{2} (v'^2_2 - v'^2_1)$$

per cui la (29) diventa:

$$F_z = \frac{\rho s}{2} (v'^2_2 - v'^2_1) \quad (31)$$

⁹Confronta [3] a pag. 195.

¹⁰Guarda in proposito [1] a pag. 625.

¹¹Positiva se agente nella direzione del flusso.

È ora possibile definire la velocità \vec{V}'_{12} ortogonale alla forza $\vec{F} = (F_z; F_\theta)$ agente sulle pale:

$$\begin{aligned}\frac{F_z}{F_\theta} &= \frac{\frac{1}{2} \rho s (v'_2 - v'_1) (v'_2 + v'_1)}{\rho w'_1 s (v'_2 - v'_1)} && \text{(dalle (31) e (30))} \\ \frac{F_z}{F_\theta} &= -\frac{v'_1 + v'_2}{2w'_1}\end{aligned}$$

la quale può interpretarsi come prodotto scalare di *Forza per Velocità*:

$$\vec{V}'_{12} \equiv \left(w'_1; \frac{v'_2 + v'_1}{2} \right) \quad (32)$$

tale che

$$\vec{F} \cdot \vec{V}'_{12} \equiv 0$$

dove una possibile definizione di \vec{V}'_{12} è:

$$\vec{V}'_{12} \triangleq \frac{1}{2} (\vec{V}'_1 + \vec{V}'_2)$$

dove:

$$\vec{V}'_1 \equiv (v'_1; w'_1); \quad \vec{V}'_2 \equiv (v'_2; w'_2).$$

essendo, per un flusso incomprimibile, $w'_2 = w'_1$.

Il modulo della forza agente sulle pale:

$$\begin{aligned}F^2 &= F_z^2 + F_\theta^2 = \rho^2 s^2 \left[w'^2_1 (v'_1 - v'_2)^2 + \frac{1}{4} (v'^2_2 - v'^2_1)^2 \right] \\ &= \rho^2 s^2 (v'_1 - v'_2)^2 \left[w'^2_1 + \frac{v'^2_2 + v'^2_1}{4} \right] = \rho^2 s^2 (v'_1 - v'_2)^2 V'^2_{12}\end{aligned}$$

da cui il modulo di F vale:

$$F = s V'_{12} \rho \Delta v' \quad (33)$$

dalla quale si evince di nuovo che, se il flusso non viene ruotato ($\Delta v' = 0$), non ci sono forze agenti sulla palettatura.

Combinando la (33) con l'equazione di Eulero (18) mantenendo $r = costante$ (macchina assiale):

$$\begin{aligned}F &= s V'_{12} \frac{\Delta p_t}{\omega r} \triangleq \frac{1}{2} \rho V'^2_{12} C_L c \\ \Delta p_t &= \frac{1}{2} \rho C_L V'^2_{12} \frac{c}{s} \frac{\omega r}{V'_{12}}\end{aligned} \quad (34)$$

dove: il coeff. di portanza viene definito così dalla (34), c è la corda, $\sigma \triangleq \frac{c}{s}$ è la solidità, $\frac{\omega r}{V'_{12}}$ resta invariato se i triangoli di velocità sono simili (è un espediente utile per scalare le macchine). Si nota che il salto di pressione totale varia quadraticamente con la variazione di velocità in ingresso, in macchine con i triangoli simili.

Per conoscere V'_{12} è indispensabile conoscere l'angolo di deviazione δ^0 . In proposito, studia la regola di CARTER a pag. 219 di [3].

3.2 Equilibrio Radiale nelle Macchine Assiali

[Cfr [3] a pag. 199] Il problema che verrà qui ora esposto è di questo tipo: la palettatura e la distribuzione $w_1(r)$ sono note: si vuole calcolare $w_2(r)$ in uscita. La procedura usata è quella di considerare che la palettatura comporti un cambiamento “impulsivo”, concentrato in una sola sezione, sul flusso (su w). Il modello ne risulta semplificato perchè resta solo r come variabile esplicita. Ovviamente, le due sezioni a monte (1) e a valle (2) debbono essere sufficientemente lontane dalla palettatura da poter considerare che non ci sono più variazioni circonferenziali lungo θ . Questo modello è detto HUB-TO-TIP e, evidentemente, trascura non-idealità quali lo strato limite, i flussi secondari, eccetera.

Per una macchina assiale è $\Delta r = 0$. Si parte riscrivendo l’equazione di Eulero (14) per un gas perfetto caloricamente perfetto, tenendo conto che $u^2 \ll (v^2 + w^2)$:

$$c_p \Delta T + \frac{1}{2} \Delta (v^2 + w^2) = \omega \Delta (r v) \quad (35)$$

questa va differenziata rispetto a r :¹²

$$c_p \Delta \left(\frac{dT}{dr} \right) + \Delta \left(w \frac{dw}{dr} \right) + \Delta \left(\frac{v}{r} \frac{d(rv)}{dr} - \frac{v^2}{r} \right) = \omega \Delta \left(\frac{d(rv)}{dr} \right) \quad (36)$$

La forza centrifuga su ciascun elemento fluido è eguagliata dal gradiente radiale di pressione: dalla (6), ponendo $f = \frac{v^2}{r}$:

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r} \quad (37)$$

La trasformazione sia politropica:

$$\frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = \text{costante} \quad \frac{dT}{T} = \frac{n-1}{n} \frac{dp}{p}$$

differenziando lungo r , ovvero moltiplicando per T/dr :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{n-1}{n} \frac{dp}{dr} \frac{T}{p}$$

la quale diventa, per un dato gas perfetto ($\frac{p}{T} = \rho R$):

$$\frac{dT}{dr} = \frac{n-1}{n} \frac{dp}{dr} \frac{1}{\rho R}$$

Infine, sostituendovi la (37) e ricordando che $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{n-1}{n} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{c_p} \frac{v^2}{r} \triangleq \frac{\mu}{c_p} \frac{v^2}{r} \quad (38)$$

La (36) può allora risciversi così:

$$\begin{aligned} c_p \frac{\mu}{c_p} \Delta \left(\frac{v^2}{r} \right) + \Delta \left(w \frac{dw}{dr} \right) + \Delta \left(\frac{v}{r} \frac{d(rv)}{dr} - \frac{v^2}{r} \right) &= \omega \Delta \left(\frac{d(rv)}{dr} \right) \\ (\mu - 1) \Delta \left(\frac{v^2}{r} \right) + \Delta \left(w \frac{dw}{dr} \right) + \Delta \left[\left(\frac{v}{r} - \omega \right) \frac{d(rv)}{dr} \right] &= 0 \end{aligned}$$

¹²

$$v \frac{dv}{dr} = \left\{ v \frac{dv}{dr} + \frac{v^2}{r} \right\} - \frac{v^2}{r} = \left\{ \frac{v}{r} \left(r \frac{dv}{dr} + v \right) \right\} - \frac{v^2}{r} = \left\{ \frac{v}{r} \frac{d(rv)}{dr} \right\} - \frac{v^2}{r}$$

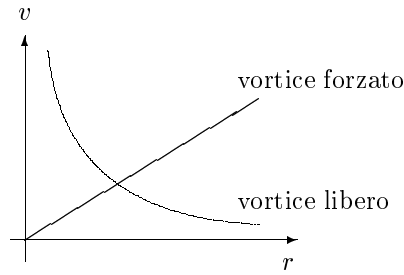


Figura 5: *Andamento qualitativo del vortice libero e del vortice forzato.*

Per semplicità di trattazione consideriamo il flusso isoentropico ($\mu = 1$):

$$\Delta \left(w \frac{dw}{dr} \right) + \Delta \left[\left(\frac{v}{r} - \omega \right) \frac{d(rv)}{dr} \right] = 0 \quad (39)$$

Due casi hanno rilevanza: il *vortice libero* e il *vortice forzato*. Guarda la fig. 5 e le sez. 3.2.1 e 3.2.2.

3.2.1 Vortice Libero

Si impongono l'equilibrio radiale

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}$$

e che il lavoro compiuto a ciascun raggio sia lo stesso:

$$\frac{dh_t}{dr} = 0.$$

Il prodotto rv non varia lungo il raggio della pala:

$$\frac{d(rv)}{dr} \equiv 0$$

con cui la (39) diventa:

$$w_1 \frac{dw_1}{dr} = w_2 \frac{dw_2}{dr}$$

Integrando:

$$\frac{1}{2} w_1^2 = \frac{1}{2} w_2^2 + C_1$$

dove la costante di integrazione si determina così:

$$\int_{r_{mozzo,1}}^{r_{tip,1}} \rho_1 w_1(r) 2\pi r dr = \int_{r_{mozzo,2}}^{r_{tip,2}} \rho_2 [w_1(r) + C_1] 2\pi r dr$$

Un grosso problema del vortice libero è costruttivo, perché la pala risulta parecchio svergolata.

3.2.2 Vortice Forzato

Il quoziente $\frac{v}{r} = k$ non varia lungo il raggio della pala.¹³ La (39) diventa:¹⁴

¹³ k è diverso per ciascuna sezione; in genere $k_1 \neq k_2$.

¹⁴

$$\frac{d(rv)}{dr} = k \frac{d\left(\frac{rv}{k}\right)}{dr} = k \frac{d(r^2)}{dr}$$

$$w_1 \frac{dw_1}{dr} + (k_1 - \omega) k_1 \frac{d(r^2)}{dr} = w_2 \frac{dw_2}{dr} + (k_2 - \omega) k_2 \frac{d(r^2)}{dr}$$

In ciascuna delle due sezioni 1 e 2 si può integrare lungo r ; ad esempio, per la sezione 1:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2} w^2 + (k_1 - \omega) r^2 k_1 \right] &= C_1 \\ \frac{1}{2} w^2 + (k_1 - \omega) r^2 k_1 &= C_{11} r + C_{12} \end{aligned}$$

Col vortice forzato, il profilo di velocità w viene deformato in senso parabolico.

4 I Compressori Radiali

Come per un moto rigido, la relazione tra velocità assoluta e velocità relativa nel sistema rotante è:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (40)$$

L'entalpia totale, comprendendo un termine cinetico, dipende dal riferimento scelto:

$$\begin{aligned} h_t &= h + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} = h + \frac{1}{2} (\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r})^2 = h + \frac{1}{2} (\vec{v}' \cdot \vec{v}' + 2\omega r v' + \omega^2 r^2) \\ &= h'_t + \omega r (v - \omega r) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = h'_t + \omega r v - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \end{aligned} \quad (41)$$

dove s'è definita h'_t come l'entalpia totale *misurabile in un riferimento rotante*:

$$h'_t \triangleq \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} v'^2 + h = h + \frac{1}{2} v^2 \quad (42)$$

In base alla (41), si può scrivere:

$$\Delta h_t = \Delta h'_t + \omega \Delta(r v) - \frac{1}{2} \omega^2 \Delta(r^2)$$

dalla quale, sottraendo la (14), si ricava che:

$$\Delta h'_t = \frac{1}{2} \omega^2 \Delta(r^2). \quad (43)$$

Questo legame tra la variazione di entalpia totale calcolata nel sistema relativo e alcune quantità del sistema assoluto indica che non c'è $\Delta h'_t$ in una macchina puramente assiale: in un riferimento rotante si “vede” una pala rotorica ferma, pertanto l'entalpia totale (e perciò — eq. (17) — anche la pressione totale, a meno di perdite) resta invariata. La (43) è l'equazione di Eulero per il riferimento rotante.

Dunque per pompare possono esistere due “filosofie” diverse:

- Macchine radiali: si sfrutta Δr . Se $r_2 > r_1$, l'entalpia totale cambia in tutti e due i riferimenti perché lavorano anche le forze centrifughe (che non sono ortogonali al flusso) oltre all'effetto portante delle pale. Questo spiega come mai le giranti centrifughe, dall'aerodinamica primitiva, hanno iniziato a funzionare molto prima delle macchine assiali.
- Macchine assiali: il disegno aerodinamico è fondamentale.

Il flusso uscente dalla palettatura radiale viene accolto da una voluta,¹⁵ con oppure senza interposizione di un diffusore;¹⁶ questo aumenta il rendimento, ma solo al design point. Solitamente il diffusore non esiste nelle applicazioni spaziali.

¹⁵Guarda la fig. 9.3 a pag. 427 di [1].

¹⁶Confronta la sezione 9.4 di [1].

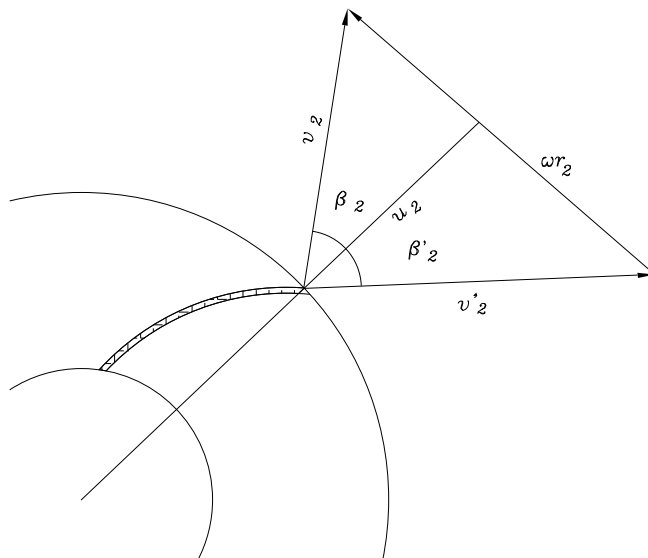


Figura 6: Girante con pale all'indietro

Per quel che riguarda le velocità di funzionamento, queste sono tali da garantire all'uscita una condizione all'incirca sonica (un eventuale diffusore può portare Mch da 1,3 a 0,9 circa); velocità più alte farebbero funzionare la girante come un dissipatore di energia, viste le forti perdite soprattutto per urto; velocità più basse non avrebbero molto effetto e la girante assomiglierebbe più a un ventilatore che a un compressore!

Differentemente da quanto avviene per i compressori aeronautici, per le turbopompe si accettano profili (curvi) relativamente poco curati. Spesso i bordi di attacco e di uscita sono realizzati semplicemente tagliando il raggio desiderato per adattare meglio la girante al progetto; in questo si è aiutati dalla scelta della curvatura (spirale logaritmica) che garantisce angoli di uscita e di ingresso costanti per ciascuna circonferenza di taglio.

Eseguiamo qualche calcolo supponendo che la velocità in ingresso della girante sia pressoché nulla, senza prerotazione (fig. 6):¹⁷

$$\begin{aligned}
 v_1 &\approx 0 \\
 v_2 &= \omega r_2 - u_2 \tan \beta'_2 \\
 \Delta h_t &= \omega r_2 (\omega r_2 - u_2 \tan \beta'_2) && \text{(dalla (14))} && (44) \\
 \frac{\Delta h_t}{\omega^2 r_2^2} &= 1 - \frac{u_2}{\omega r_2} \tan \beta'_2 \\
 \psi &= 1 - \phi \tan \beta'_2
 \end{aligned}$$

(nell'espressione di ϕ , u_2 ha preso il posto che ha w_2 per le macchine assiali).

L'equazione (44) potrebbe meravigliare perché il lavoro sembra calcolato soltanto in base alle componenti di velocità circolari, con l'apparente assenza del termine di velocità radiale, che pure, differentemente da quanto avviene in un compressore assiale, contribuisce all'energia complessiva del flusso: *non* si può trascurare la componente radiale rispetto alle altre. L'“arcano” è così spiegato:¹⁸ dalla (12) si vede che il secondo membro della (44) altro non è che il lavoro compiuto sul fluido e dalla (13) si vede che la coppia τ che compie lavoro non dipende dalla velocità radiale; d'altra parte, il contributo energetico della velocità radiale non è assente bensì è compreso nel termine cinetico dell'entalpia totale: $h_t = h + \frac{1}{2}u^2 + v^2 + w^2$.

Le pale delle giranti possono essere *in avanti* (quando $\beta' < 0$), *diritte* ($\beta' = 0$) oppure *all'indietro* ($\beta' > 0$) — per queste definizioni, il segno di β' è assunto in modo da essere positivo se la pala gira in direzione opposta a ω . Le pale in avanti hanno una caratteristica apparentemente più favorevole (guarda la fig. 7) ma peccano in stabilità (vedi fig. 8). Le pale

¹⁷Guarda anche a pag. 622 di [1].

¹⁸Cfr [1] a pag. 428.

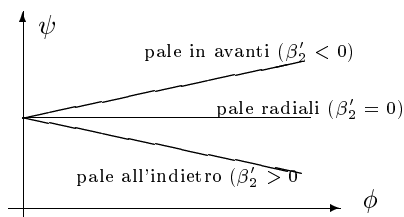
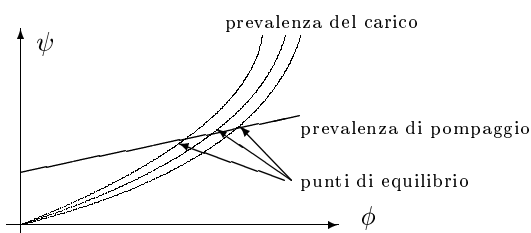
Figura 7: Caratteristiche a confronto al variare di β' 

Figura 8: Con le pale in avanti, per piccole variazioni del carico si hanno grandi variazioni di portata (che possono portare a uno “strangolamento” o a un “singhiozzo”). Come esempio, ricordiamoci dei fischietti, dove se soffiamo molto di più la portata non aumenta apprezzabilmente!

diritte hanno un sostanziale vantaggio strutturale (reggono meglio le forze centrifughe). Le pale all'indietro sono quelle solitamente usate perchè garantiscono un flusso più stabile.

4.1 Similitudini per Turbopompe Radiali

$$\psi = 1 - \phi \tan \beta'_2$$

$$\begin{cases} \psi = \frac{\Delta h_t}{\omega^2 r_2^2} = \frac{\Delta p_t}{\rho \omega^2 r_2^2} \\ \phi = \frac{u_2}{\omega r_2} = \frac{\dot{Q}/Area_2}{\omega r_2} \end{cases} \quad (45)$$

Se b è lo spessore in direzione assiale della girante in uscita, il flusso volumetrico \dot{Q} è dato da:

$$\dot{Q} = \underbrace{2\pi b r_2}_{Area_2} u_2 = 2\pi \left(\frac{b}{r_2}\right) \omega r_2^3 \phi \quad (46)$$

(b/r_2 è uguale per macchine geometricamente simili).

4.2 Pompe Geometricamente Simili

È possibile predire il comportamento di una pompa a diverse velocità se è noto il suo comportamento ad una data velocità:¹⁹

$$\begin{aligned} \dot{Q} &\sim \omega \\ H &\sim \omega^2 \\ \mathcal{P} &\sim \omega^3 \end{aligned}$$

dove si sono indicate con H la prevalenza della pompa (pump head) e con \mathcal{P} la sua potenza.

¹⁹Confronta [5] a pag. 337.

La **prevalenza** H di una pompa è l'altezza di una colonna di liquido che causa una pressione p_t sul fondo. A pari potenza e flusso di massa, la prevalenza della pompa è inversamente proporzionale alla densità del propellente (del liquido pompato). Siccome le pompe sono sostanzialmente macchine con flusso a volume costante, i propellenti più densi richiedono una prevalenza minore dalla pompa, minore potenza e perciò un complessivo più piccolo e leggero. Dalla seguente coppia di formule è immediato rendersi conto che, a pari Δp_t , la potenza (l'entalpia) richiesta è inferiore se ρ aumenta:

$$H \triangleq \frac{\Delta p_0}{\rho g_0} \qquad \Delta h_0 = \frac{\Delta p_0}{\rho} \qquad (47)$$

Per pompe geometricamente simili, dalle (46) e (45) si ottengono le seguenti proporzionalità:

$$\phi \sim \frac{\dot{Q}}{\omega r_2^3} \qquad \psi \sim \frac{\Delta p_t}{\rho \omega^2 r_2^2} \qquad (48)$$

Queste rendono subito evidente l'utilità delle seguenti due definizioni di *velocità angolare specifica* e di *raggio specifico*.²⁰

Dalle due (48) si "elimina" r_2 :

$$\begin{aligned} r_2^3 &= \frac{\dot{Q}}{\omega \phi} & r_2^2 &= \frac{\Delta p_t}{\rho \omega^2 \psi} \\ r_2 &= \frac{\dot{Q}^{1/3}}{\omega^{1/3} \phi^{1/3}} & r_2 &= \frac{\sqrt{\Delta p_t}}{\omega \sqrt{\rho \psi}} \end{aligned}$$

eguagliando in r_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}^{1/3}}{\omega^{1/3} \phi^{1/3}} &= \frac{\sqrt{\Delta p_t}}{\omega \sqrt{\rho \psi}} \\ \frac{\omega^{2/3} \dot{Q}^{1/3}}{\sqrt{\Delta p_t / \rho}} &= \frac{\phi^3}{\sqrt{\psi}} \end{aligned}$$

elevando tutto a $3/2$ per far comparire 1 come esponente di ω :

$$\frac{\omega \sqrt{\dot{Q}}}{(\Delta p_t / \rho)^{3/4}} = \frac{\sqrt{\phi}}{\psi^{3/4}}$$

la velocità specifica è definita perciò così:

$$\omega_s \triangleq \frac{\omega \sqrt{\dot{Q}}}{(\Delta p_t / \rho)^{3/4}} \sim \frac{\sqrt{\phi}}{\psi^{3/4}} \qquad (49)$$

Con un procedimento analogo, si "elimina" ω per definire il raggio specifico r_s :

$$r_s \triangleq \frac{r_2 (\Delta p_t / \rho)^{1/4}}{\sqrt{\dot{Q}}} \sim \frac{\psi^{1/4}}{\phi^{1/2}} \qquad (50)$$

I valori specifici sono utili nella fase del progetto in cui bisogna passare a un primo dimensionamento della pompa; invece, in fase di *verifica* vengono usati ϕ e ψ .²¹ Per usare i valori di ψ e di ϕ al design point è infatti innanzitutto necessario conoscere r_2 e ω . I valori specifici permettono di organizzare l'esperienza pregressa (i dati raccolti su pompe già costruite). In questo modo i valori specifici possono essere noti ancor prima di dettagliare il funzionamento della turbomacchina, perché dipendono dalla missione da soddisfare. Con grafici basati su esperienze pregresse,²² quali quelli nelle figure 9 e 10, si può scegliere abbastanza agevol-

²⁰Guarda anche [1] a pag. 627 e [5] a pag.337.

²¹Per esempio, sarebbe troppo costoso provare le turbopompe direttamente con idrogeno liquido mentre si sta affinando il progetto. Perciò, di solito le prove vengono eseguite con acqua ed i calcoli in termini di ψ e di ϕ .

²²Guarda anche la figura a pag. 629 di [1] e la tabella a pag. 338 di [5].

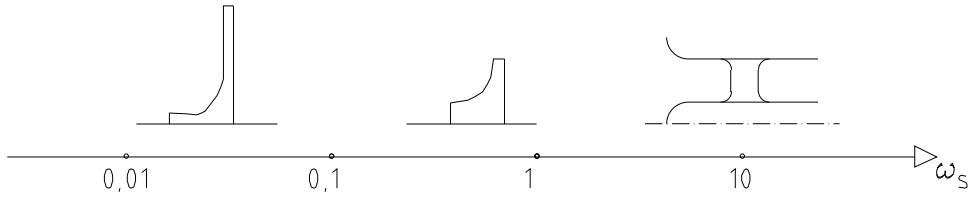


Figura 9: La velocità specifica indica se il compressore è radiale, assiale o una via di mezzo.

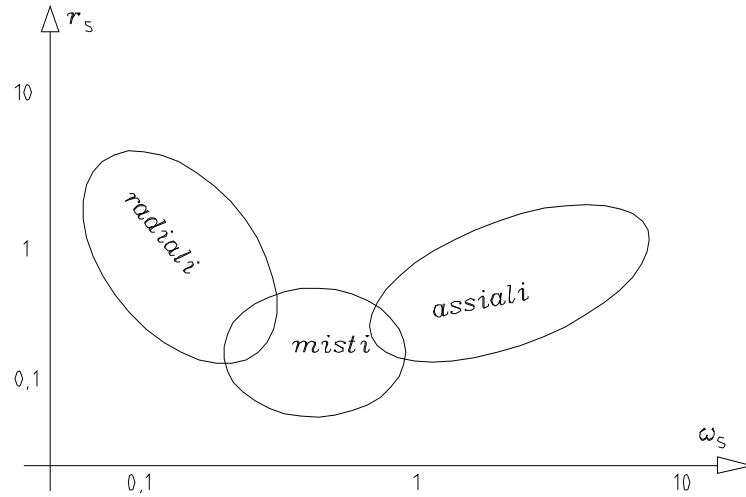


Figura 10: In base a generalizzazione di dati storici, l'universo delle pompe è oggi così suddiviso.

mente la coppia di ω_s e r_s una volta che si ha in mente di realizzare un compressore radiale anzich uno assiale, per esempio.

Studiando “storicamente” il rendimento η_p della pompa in corrispondenza dei diversi valori di ω_s , si vede che questo passa per un massimo quando è $\omega_s \approx 1$ (fig. 11). Questo non dovrebbe sorprendere visto che il rendimento è un compromesso tra una grande superficie bagnata, con elevate perdite per attrito, quando ω_s è piccolo e tra un elevato numero di pale portanti (e quindi resistenti aerodinamicamente).

5 Le Perdite

In confronto al caso ideale, esistono innumerevoli motivi per cui le prestazioni effettive sono inferiori a quelle ideali e innumerevoli problemi aggiuntivi (stallo rotante, flusso inverso²³ eccetera). A tal proposito si può guardare [2], capitoli 31 e 32, e [3], pag. 232.

²³Si può avere flusso inverso quando ci sono forti gradienti radiali di pressione, per cui, ad esempio, la pressione al mozzo è molto maggiore di quella al “tip”, generando un flusso inverso vicino al mozzo.

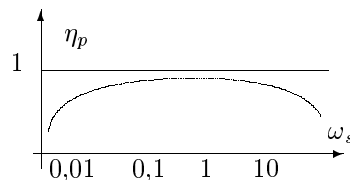


Figura 11: $\eta_p(\omega_s)$

5.1 Perdite di Diffusione

Tali perdite abbassano la pressione totale rispetto al valore ideale e, pur lasciando inalterata la temperatura totale, ne alterano la distribuzione tra le due aliquote di temperatura statica (che aumenta) e dinamica (che diminuisce). Una esempio di perdita per diffusione è dato da un flusso veloce che esce da una parete e, senza un ugello, si immette nell'atmosfera ferma: si perde il contributo dinamico della pressione totale del flusso.

Note che siano le condizioni a monte del rotore (1), la pressione totale in uscita (2) può essere nota se sono note le perdite. Il *coefficiente di perdita* è definito come la perdita di pressione totale rapportata alla pressione dinamica in ingresso:²⁴

$$\omega_R \triangleq \frac{p'_{t1} - p'_{t2}}{p'_{t1} - p_1} \quad (51)$$

ω_R è un fattore di perdita perciò è (sperabilmente!) $\omega_R \ll 1$.

Combinando insieme l'equazione meccanica di stato per i gas perfetti ($p = \rho \mathcal{R} T$), la (16) e la (20) si ottiene:

$$ds = c_p \frac{dT'_t}{T'_t} - \mathcal{R} \frac{dp'_t}{p'_t} \quad (52)$$

È utile parlare di entropia (anzich di pressione totale) perch questa non varia con il riferimento (non include una componente dinamica e perciò relativa). Si può ottenere il salto di entropia dello stadio (rotore + statore) semplicemente sommando i due salti:

$$\Delta s = \Delta s_R + \Delta s_S = c_p \ln \frac{T_{tf}}{T_{ti}} - \mathcal{R} \ln \frac{p_{tf}}{p_{ti}} \quad (53)$$

Nel caso che l'entalpia totale non vari, per un gas perfetto caloricamente perfetto la (52) diventa:

$$ds = -\mathcal{R} \frac{dp'_t}{p'_t} \quad (54)$$

da cui, integrando e sostituendo l'espressione del fattore di perdita (51), si ottiene, per il salto di entropia nel rotore:²⁵

$$\begin{aligned} \Delta s_R &= -\mathcal{R} \ln \frac{p'_{t2}}{p'_{t1}} \\ \Delta s_R &= -\mathcal{R} \ln \left[1 - \omega_R \left(1 - \frac{p_1}{p'_{t1}} \right) \right] \quad (\text{cfr pag. 221 di [3]}) \end{aligned}$$

(un'espressione simile si ottiene per lo statore).

Poche righe fa s'è fatta l'ipotesi della temperatura totale costante. Quando ha senso? Per uno statore, questa è facilmente vera ch non si effettua lavoro sul fluido. Per un rotore, in base alla (43), questo è vero solo in un compressore assiale; in un compressore radiale, l'entalpia totale non resta costante.

²⁴Cfr [3] a pag. 214. Osserviamo che le pressioni in gioco vanno calcolate mediate su tutto il flusso (nessun effetto di scia).

²⁵Cfr [3] a pag. 221.

La (53), ricordando che $\mathcal{R}/c_p = \frac{\gamma-1}{\gamma}$, può risciversi così, prendendo per riferimento le grandezze in un riferimento fisso:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{c_p} &= \ln \frac{T_{tf}}{T_{ti}} - \frac{\mathcal{R}}{c_p} \ln \frac{p_{tf}}{p_{ti}} \\ \frac{\Delta s}{c_p} &= \ln \frac{T_{tf}}{T_{ti}} \left(\frac{p_{ti}}{p_{tf}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ \frac{T_{ti}}{T_{tf}} e^{\frac{\Delta s}{c_p}} &= \left(\frac{p_{ti}}{p_{tf}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ \frac{T_{tf}}{T_{ti}} e^{-\frac{\Delta s}{c_p}} &= \left(\frac{p_{tf}}{p_{ti}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \end{aligned} \quad (55)$$

approssimando al primo ordine, per piccoli Δs :

$$\left(\frac{p_{tf}}{p_{ti}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \simeq \frac{T_{tf}}{T_{ti}} \left(1 - \frac{\Delta s}{c_p} \right)$$

La formula di Eulero tratta l'entalpia totale e quindi la temperatura totale, ma per capire quanta di questa è diventata calore in seguito a perdite bisogna guardare $\frac{p_{tf}}{p_{ti}}$. Può allora definirsi il rendimento di stadio come il rapporto tra il lavoro utilmente sfruttato per la compressione ed il lavoro erogato. Per gas perfetti con c_p costante:

$$\eta_s \triangleq \frac{\left(\frac{p_{tf}}{p_{ti}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{T_{tf}}{T_{ti}} - 1}$$

in cui numeratore e denominatore sono uguali solo nel caso in cui si passa da i a f isoentropicamente, perch solo in tal caso sarebbe:

$$\frac{p_{tf}}{p_{ti}} = \left(\frac{T_{tf}}{T_{ti}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Quanto esposto finora consente di avere il rendimento se sono noti i coefficienti di perdita ω_R e ω_S .

5.2 Valutazione Sperimentale dei Coefficienti di Perdita

Si introduce il parametro di diffusione:²⁶

$$D \triangleq \underbrace{\frac{V_1 - V_2}{V_1}}_A + \underbrace{\frac{|v_2 - v_1|}{2\sigma V_1}}_B \quad (56)$$

definito per un riferimento fisso; per un rotore, la definizione è simile ma con gli apici ($'$).

\mathcal{A} Il fluido è stato accelerato o decelerato? Un flusso decelerato va sicuramente incontro a un gradiente avverso di pressione. Se \mathcal{A} è grande, il flusso subisce diffusione.

\mathcal{B} è rappresentativo del carico sulla singola pala. Se una pala è molto caricata, essa ha molta portanza e molta differenza di pressione tra intradosso e estradosso la quale, prima o poi lungo la pala, deve riazzerarsi. \mathcal{B} è perciò rappresentativo del gradiente di pressione dovuto al carico.

Sia \mathcal{A} che \mathcal{B} influiscono pesantemente sul comportamento dello strato limite. Le correzioni riportate nelle figure 12 e 13 consentono di stimare i coefficienti di perdita. I grafici mostrati sono tipicamente sperimentali.

²⁶Cfr [3] a pag. 216.

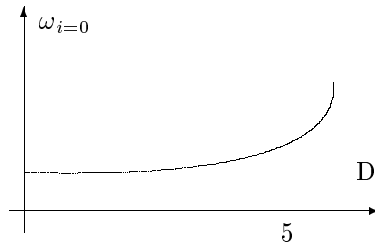


Figura 12: Cfr anche [3] a pag. 218 e [1] a pag. 319 — Il grafico mostra il coefficiente di perdita della pala quando l'incidenza i è nulla in funzione di D ; solitamente non si vuole arrivare a $D = 5$, rappresentativo di un profilo stallato. Ottenuto il valore di $\omega_{i=0}$, questo va corretto in funzione dell'incidenza (fig. 13).

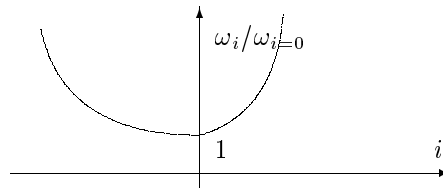


Figura 13: Grafici del genere hanno andamento circa parabolico (non simmetrico però) — guarda anche [3] a pag. 214.

6 Analisi Dimensionale

[Cfr [1] a pag. 624] Per descrivere il funzionamento di una turbomacchina si può procedere con una analisi dimensionale.²⁷ Per esempio, le due grandezze di interesse principali (vale a dire $\frac{p_{t2}}{p_{t1}}$ e il rendimento) sono sicuramente funzione della temperatura totale in ingresso, della portata, della velocità di rotazione, della dimensione geometrica, di γ , della viscosità μ , del numero di Reynolds:

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}} = f(T_{t1}, \dot{m}, \omega, D, \gamma, \mu, Re)$$

Possono dunque identificarsi *tre* parametri adimensionali:²⁸

$$\frac{\omega D}{\sqrt{\gamma Re T_{t1}}} \quad \frac{\dot{m} \sqrt{\gamma Re T_{t1}}}{D^2 p_{t1}} \quad \frac{\omega D^2}{\nu}$$

Essi sono: il numero di giri ridotto (assomiglia ad un numero di Mach per la velocità periferica tangenziale, perch $T_{t1} \approx T_1$), la portata ridotta, il numero di Reynolds (la cui dipendenza è però scarsa per quel che s'è già detto a pag. 6). Guarda ad es. la fig. 14. Ci si aspetta perciò che:

$$\frac{p_{t2}}{p_{t1}} = f(\omega_r, \dot{m}_r)$$

La portata in massa può scriversi:

$$\dot{m} = \frac{p_t A_t M}{\sqrt{R T_t}} \Gamma(\gamma, M)$$

in cui, se il flusso è sonico:

²⁷Se proprio se ne vuol sapere di più, si può guardare [4].

²⁸Purtroppo, spesso i costruttori non usano veri parametri adimensionali. Viene infatti considerato che certe grandezze sono sempre le stesse (ad es. Re , γ) e perciò vengono sottintese; il risultato sono quantità dimensionate: $\frac{N [rpm]}{\sqrt{T_{ti}}}$, $\frac{\dot{m} \sqrt{T_{ti}}}{p_{ti}}$.

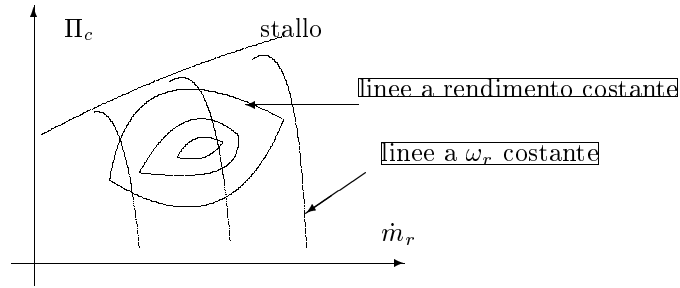


Figura 14: Esempio tipico di uso dei parametri adimensionali per visualizzare le prestazioni di un compressore.

$$\Gamma(\gamma, 1) = \Gamma = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

è la funzione di VANDENKERCHOVE incontrata per i razzi.²⁹

Riferimenti bibliografici

- [1] Philip G. Hill e Carl R. Peterson. *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*. Addison-Wesley, second edition, 1992. ISBN 0-201-14659-2.
- [2] Mr. Peacock e prof. Renzo Lazzaretto. Axial compressors. Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Università di Pisa, 1997.
- [3] Jack L. Kerrebrock. *Aircraft Engines and gas Turbines*. The MIT Press, second edition, 1992. ISBN 0-262-11162-4.
- [4] Ennio Mattioli. *Aerodinamica*, chapter 4.2, pages 255–257. Levrotto & Bella, Levrotto & Bella Editrice s.a.s., Corso Vittorio Emanuele, 26/F, Torino, third edition, 1992.
- [5] George P. Sutton. *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley and Sons, sixth edition, 1992. ISBN 0-471-52938-9.

²⁹Guarda ad es. [5] a pag. 62.