Tesi di Laurea
in
Ingegneria Aerospaziale
Indirizzo Spaziale

Analisi delle Forze Rotodinamiche in Turbomacchine Cavitanti

Marco R. Venturini Autieri

Anno Accademico 2002–2003

T132

CENTROSPAZIO

UNIVERSITÀ DI PISA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

TESI DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE
INDIRIZZO SPAZIALE

ANALISI DELLE FORZE ROTODINAMICHE IN TURBOMACCHINE CAVITANTI

CANDIDATO

MARCO R. VENTURINI AUTIERI

RELATORI

PROF. LUCA D'AGOSTINO PROF. RENZO LAZZERETTI

ANNO ACCADEMICO 2002–2003

Sommario

Si investiga la dinamica linearizzata del flusso tridimensionale in induttori elicoidali di lunghezza finita e centrifughi con cavitazione aderente alle pale, per studiare la risposta delle forze rotodinamiche esercitate dal fluido su giranti dotate di moto eccentrico. Il flusso all'ingresso è modellato come completamente guidato, incomprimibile, non viscoso. La cavitazione viene inclusa attraverso le condizioni al contorno sul lato di aspirazione delle pale, dove è modellata come uno strato uniforme di miscela aria/acqua. Le equazioni di campo tridimensionali sono risolte per decomposizione modale.

Abstract

This work investigates the linearized dynamics of the three-dimensional flow in finite-length inducers with attached blade cavitation, with the purpose of understanding the impact of the cavitating flow response on the rotordynamic forces exerted by the fluid on the impeller of whirling turbopumps. The flow in the inducer annulus is modeled as a fully-guided, incompressible and inviscid liquid. Cavitation is included through the boundary conditions on the suction sides of the blades, where it is assumed to occur uniformly in a small layer of given thickness. Constant boundary conditions for the total pressure are imposed at the inlet and outlet sections of the inducer blade channels. The three-dimensional unsteady governing equations are written in rotating "body fitted" orthogonal coordinates, linearized for small-amplitude whirl perturbations of the mean steady flow, and solved by modal decomposition.

"Beggar that I am, I am even poor in thanks."
— *William Shakespeare*, Hamlet. Act II. Sc. 2.

Grazie!

Grazie a mamma e babbo,
ho scoperto di poter resistere a cose ben più dure di
un corso di Laurea!

Grazie al professor Luca d'Agostino,
ho deciso di voler dedicare all'ingegneria qualcosa di più di
un corso di Laurea.

Grazie all'ingegner Emilio Rapposelli,
ho risolto quei problemi piccoli ma insidiosi che contornano
un corso di Laurea.

Indice

Indice **I**

Elenco delle figure **V**

Lista dei simboli e notazioni **IX**

1 Introduzione **1**
1.1 Cosa sono le forze rotodinamiche? 1
1.2 Perché studiare le forze rotodinamiche? 1
1.3 Perché le forze rotodinamiche sono importanti nelle turbomacchine? . 2
1.4 Cosa si sa già, cosa non si sa ancòra? 3
1.5 Qual è lo scopo del presente lavoro di tesi? 7
1.6 Descrizione del lavoro di tesi 7
1.6.1 L'orbita studiata 8
1.6.2 La soluzione analitica 8

I Induttori assiali **11**

2 Modello matematico per un induttore elicoidale **13**
2.1 Ipotesi 13
2.2 Flusso medio nell'induttore 15
2.2.1 Equazione di equilibrio radiale 16
2.3 Sistemi di riferimento 17
2.3.1 Coordinate cilindriche (r, θ, z) 17
2.3.2 Coordinate ortonormali elicoidali (r, n, s) 18
2.3.3 Metrica delle coordinate elicoidali 20
2.4 Equazioni di campo 22
2.5 Equazioni di perturbazione 24

2.5.1 Equazioni di perturbazione in presenza delle forze di Coriolis . 24
2.5.2 Equazioni di perturbazione senza le forze di Coriolis 25
2.6 Equazioni nei sistemi elicoidali 28
2.6.1 Componenti di velocità nel riferimento elicoidale 28
2.6.2 Equazioni di perturbazione 28
2.7 Equazioni delle superfici nel riferimento elicoidale rotante 28
2.8 Sezioni di ingresso e uscita 29
2.9 C.c. delle superfici solide nel riferimento elicoidale relativo 30
2.10 Strato cavitante 32
2.11 Separazione dell'equazione di campo 34
2.12 Condizioni al contorno in forma complessa 36
2.13 Esame del problema omogeneo 37
2.14 Problema agli autovalori per l'O.D.E. radiale 37
2.15 Problema agli autovalori per l'O.D.E. in $\mathsf{S}(s')$ 40
2.16 Problema agli autovalori per l'O.D.E. in $\mathsf{N}(n')$ 41
2.17 Schema per l'ottenimento della soluzione 42
2.18 Soluzione per l'eccitazione del mozzo 43
2.19 Soluzione per l'eccitazione delle pale 46
2.20 Il parametro $\mathcal{C}$ ed il modello isoentalpico 48

3 Integrazione delle pressioni **53**
3.1 Superfici 53
3.1.1 Alloggiamento 54
3.1.2 Mozzo e pale 56
3.2 Integrazione delle pressioni 60

4 Calcolo delle forze **63**
4.1 N_R modificato 63
4.2 Ω modificato 65
4.3 Forze dovute al flusso medio 65
4.3.1 Forze agenti sul mozzo 66
4.4 Eccitazione introdotta dal mozzo 68
4.4.1 Forze agenti sul mozzo 68
4.4.2 Forze agenti sulle pale 70
4.5 Eccitazione introdotta dalle pale 71
4.5.1 Forze agenti sul mozzo 71
4.5.2 Forze agenti sulle pale 72

5 Risultati e discussione **75**
5.1 Confronto dei risultati coi dati sperimentali 75
5.2 Osservazioni sui risultati 81

II Induttori centrifughi 83

6 Modello matematico per un induttore con pale logaritmiche 85

6.1 Ipotesi . . . 85
6.2 Flusso imperturbato nell'induttore . . . 87
6.3 Coordinate cilindriche . . . 88
6.4 Equazioni di governo e di perturbazione . . . 88
6.5 Coordinate omogenee ortonormali su famiglie di spirali logaritmiche . 88
6.5.1 Relazioni tra coordinate polari e coordinate a spirale . . . 93
6.5.2 Metrica nel riferimento a spirale . . . 95
6.5.3 Componenti di velocità nel riferimento a spirale . . . 95
6.6 Equazioni delle superfici nel riferimento rotante (s', n', z', t) . . . 97
6.7 Condizioni al contorno in (s', n', t) . . . 98
6.8 C.c. in forma complessa e separazione delle variabili . . . 99
6.9 Separazione dell'equazione di campo . . . 100
6.10 Problema agli autovalori per l'equazione in $S(s')$ . . . 101
6.11 Soluzione del problema non omogeneo . . . 102

7 Calcolo delle superfici e delle forze 107

7.1 Proiezione della superficie su direzioni "radiale" e "tangenziale" . . . 107
7.1.1 Espressione di $d\mathbf{S}_B$ in coordinate r^*, θ^*, z^* . . . 107
7.1.2 Proiezione sui versori "radiale" e "tangenziale" . . . 108
7.1.3 Trasformazione di coordinate . . . 108
7.2 Forze . . . 109
7.3 Forze agenti sulle pale . . . 110
7.3.1 Componente "radiale" . . . 111
7.3.2 Componente "tangenziale" . . . 114

8 Risultati e discussione 115

8.1 Esame dei grafici . . . 115
8.1.1 Adimensionalizzazione . . . 115
8.1.2 Scelta dei valori di riferimento . . . 116
8.1.3 Confronto coi valori sperimentali . . . 116

III Conclusioni generali e appendici 131

9 Conclusioni generali 133

9.1 Risultati del lavoro . . . 133
9.2 Interpretazione dei risultati . . . 134
9.3 Limiti del modello . . . 135
9.4 Possibili sviluppi . . . 136
9.4.1 Il condotto elicoidale . . . 136

A Gli induttori di riferimento **139**
A.1 L'induttore elicoidale 139
A.2 L'induttore centrifugo 141

B Pezzi matematici **143**

C Appunti per un induttore con pale radiali **147**
C.1 Equazioni delle superfici nel riferimento polare rotante 147
C.2 Componenti di velocità nel riferimento polare 148
C.3 Metrica 148
C.4 Condizioni al contorno in (r', θ', t) 148
C.4.1 C.c. complesse 149
C.5 Separazione dell'equazione di campo 149
C.6 Probema radiale agli autovalori 150
C.7 Soluzione al problema non omogeneo 151

Bibliografia **156**

Elenco delle figure

1.1 Forze radiale e tangenziale dell'induttore X (Jery, 1987) — I dati di riferimento per $\Omega = 1000$ rpm sono riportati nella curva continua . . 4

1.2 Forze radiale e tangenziale dell'induttore X con e senza cavitazione (Franz, 1989) 5

1.3 Le forze misurate da Bhattacharyya, molto irregolari, per due diversi coefficienti di flusso, in un induttore assiale elicoidale cavitante 6

1.4 Orbita di precessione in funzione del tempo (Kim *et al.*, 2002) 10

2.1 Geometria dell'induttore nell'alloggiamento 14

2.2 Triangolo delle velocità nell'induttore 15

2.3 Coordinate cilindriche 18

2.4 Coordinate ortonormali elicoidali 18

2.5 Schema dello strato cavitante 32

2.6 Condizioni al contorno per l'eccitazione introdotta solo dal mozzo . . 43

2.7 Condizioni al contorno per l'eccitazione introdotta solo dalle pale . . 46

2.8 Parametro adimensionale $\mathrm{Re}\left\{K_C\,\Omega^2\right\}$ in funzione della frazione di vuoto nello strato cavitante per modalità non smorzata in acqua a $T_L = 20^oC$ ($\delta_T/R = 0.3$, $\delta/P^* = 3\%$) e $T_L = 100^oC$ ($\delta_T/R = 1$, $\delta/P^* = 10\%$) 49

2.9 I grafici illustrano il valore assunto dalla parte reale di K_C, al variare della velocità del suono a_C (reale) e di δ/ρ_C nell'intervallo $\frac{\delta_{min}=1\ mm}{\rho_{C\,max}=600\ kg/m^3} < \frac{\delta}{\rho_C} < \frac{\delta_{max}=4\ mm}{\rho_{C\,min}=150\ kg/m^3}$ 51

3.1 Una superficie è definita con due parametri indipendenti 55

3.2 Angoli tra (R, T, z^*) e (r', θ', z') 56

3.3 Angoli tra (R, T, z^*) e (r^*, θ^*, z^*) 57

5.1 Forze rotodinamiche adimensionali f_R e f_T in funzione del rapporto ω/Ω delle velocità di rotazione del rotore e dell'eccentricità — I valori sperimentali (cerchi) ottenuti da Bhattacharyya con l'induttore nelle condizioni della tabella A.2 vengono confrontati colle predizioni del modello (linea continua) coi valori $\phi = \phi_1/(1 - r_H^2/r_T^2) = 0.0583$, $\mathrm{Re}\left\{K_C\,\Omega^2\right\} = 2.5$, $\zeta = 0.045$, $N_R = 0.285$, $\Omega^*/\Omega = 23\%$. 77

5.2 Forze rotodinamiche adimensionali f_R e f_T in funzione del rapporto ω/Ω delle velocità di rotazione del rotore e dell'eccentricità — I valori sperimentali (cerchi) ottenuti da Bhattacharyya con l'induttore nelle condizioni della tabella A.3 vengono confrontati colle predizioni del modello (linea continua) coi valori $\phi = \phi_1/(1 - r_H^2/r_T^2) = 0.0881$, $\mathrm{Re}\left\{K_C\,\Omega^2\right\} = 2.3$, $\zeta = 0.045$, $N_R = 0.285$, $\Omega^*/\Omega = 23\%$. 78

5.3 Forze rotodinamiche adimensionalizzate f_R e f_T sull'induttore di prova, nelle condizioni della tabella A.2, in funzione del rapporto ω/Ω e del parametro $\mathcal{C}$ — I calcoli sono stati eseguiti con coefficiente di flusso di $\phi = 0.0583$, coefficiente adimensionale di smorzamento di $\zeta = 0.045$, lunghezza effettiva dei canali tra le pale di $N_R = 0.285$ e velocità di rotazione effettiva di $\Omega^*/\Omega = 23\%$. 79

5.4 Visualizzazione "dall'alto" delle forze rotodinamiche adimensionalizzate sull'induttore di prova nelle condizioni della tabella A.2 in funzione del rapporto ω/Ω delle pulsazioni dei moti eccentrico e rotatorio e del parametro $\mathcal{C}$ — Nel modello, il coefficiente di flusso è $\phi = 0.0583$, il coefficiente adimensionale di smorzamento è $\zeta = 0.045$, la lunghezza effettiva dei canali tra le pale è $N_R = 0.285$ e la velocità di rotazione effettiva è data da $\Omega^*/\Omega = 23\%$. 80

5.5 Forze tangenziali esaminate separatamente al variare di ω/Ω — I valori usati nel modello sono $\phi = \phi_1/(1-r_H^2/r_T^2) = 0.0583$, $\mathrm{Re}\left\{K_C\,\Omega^2\right\} = 2.5$, $\zeta = 0.045$, $N_R = 0.285$. 82

6.1 Disegno schematico dell'induttore centrifugo schematizzato nel modello — Vi è sovrapposto il sistema di coordinate polari (r^*, θ^*, z^*). Il verso positivo per gli angoli e per la velocità angolare è antiorario (l'asse z della profondità è uscente dal foglio). Gli angoli θ^* sono misurati a partire dall'asse x^*, solidale con il rotore e passante pel bordo di attacco della prima pala. Ogni pala è caratterizzata da $\tan(-\beta) = \frac{r\,d\theta}{dr} = \text{costante}$. 86

6.2 Triangolo delle velocità ad una sezione con r generica 87

6.3 Sistema di coordinate ortonormali (s, n) su famiglie di spirali logaritmiche — La linea più spessa indica la forma effettiva del vano mappato con questo sistema di coordinate, in cui ciascuna parete è caratterizzata da una sola coordinata. 88

6.4 P e Q sono due punti su una stessa generica spirale complementare, appartenenti a due pale successive 91

6.5 Il rotore descritto dalle coordinate su spirali logaritmiche sovrapposto al rotore da descrivere 99

8.1 Risultati dei calcoli con $\Omega = 2000$ rpm, $N_B = 5$, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$. 117
8.2 Forze radiale e tangenziale dell'induttore X dotato di voluta (Jery, 1987) — I valori alle diverse velocità di rotazione sono pressoché indistinguibili 118
8.3 Risultati dei calcoli con Ω variabile nelle stesse condizioni della figura 8.2; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$. 119
8.4 Forze radiale e tangenziale dell'induttore X dotato di voluta (Jery, 1987) — I valori ai diversi coefficienti di flusso sono pressoché indistinguibili 120
8.5 Risultati dei calcoli con Ω variabile nelle stesse condizioni della figura 8.4; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$. 121
8.6 Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 5$, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm e tre valori di $\mathcal{E}$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$ 122
8.7 Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 5$, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm; le forze sono state adimensionalizzate con $\frac{1}{2} \rho_L r_T^3 \Omega^2 \pi \varepsilon$. 123
8.8 Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, N_B variabile, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm, $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$. 124
8.9 Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 7$, $\phi = 0.092$, β variabile, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm, $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$. 125
8.10 Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 7$, $\phi = 0.092$, β variabile, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm, $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$. 126
8.11 Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 7$, $\phi = 0.092$, β variabile, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm, $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$. 127
8.12 Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 7$, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $1/T = r_H/r_T$ variabile , $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$. 128
8.13 Confronto tra i risultati del modello in linea continua e i valori misurati da Jery divisi per 6, con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 5$, $\phi = 0.060$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $1/T = 0.5$, $\mathcal{E} = 2$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$. 129

9.1 CPRTF, Apparato di Prove Rotodinamiche per Pompe Cavitanti . . 137

Lista dei simboli e notazioni

"Quando uso una parola, il suo significato è esattamente quello che io voglio darle — niente di più e niente di meno."
— Humpty Dumpty

Lettere romane

$\mathfrak{a}$	Velocità del suono
$\mathfrak{b}$	Funzione che descrive una superficie o Larghezza di una pala dell'induttore centrifugo
$\mathfrak{B}$	Costante di Bernoulli
$\mathfrak{c}$	Larghezza del canale o Costante di integrazione generica
$\mathcal{C}, \mathcal{E}$	Parametri di cavitazione (Cfr pagg. 48 e 116)
$\mathfrak{e}$	Versore
$\mathfrak{K}$	Funzione modificata di Bessel del secondo tipo
$\mathfrak{i}$	Generico indice ripetuto
$\mathfrak{\imath}$	Unità immaginaria
$\mathfrak{I}$	Funzione modificata di Bessel del primo tipo
$\mathfrak{j}$	Indice della pala
$\mathfrak{J}$	Funzione di Bessel del primo tipo o Determinante Jacobiano

L Lunghezza in direzione assiale di ciascuna pala

L^* Larghezza del canale

N_B Numero delle pale dell'induttore

N_R, N_R^* Numero di avvoglimenti (e valore efficace) di ciascuna pala attorno all'asse (N_R non è necessariamente un numero intero)

p Pressione

P, P^* Passo assiale, passo ridotto

r Raggio di un elemento dell'induttore

R Raggio medio di una bolla in umodello barotropico di cavitazione (Cfr pag. 49)

T Temperatura assoluta

$\mathbf{u}$ Velocità del flusso [Senza pedice è riferita all'interno dell'induttore. In un riferimento (r, θ, z) si scompone così: $\mathbf{u} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{w} = \nu\, \boldsymbol{e}_\theta + w\, \boldsymbol{e}_z$. Il componente radiale è nullo, perciò non c'è possibiltà di confonderlo con il vettore velocità completo $\mathbf{u}$]

$\mathbf{x}$ Vettore posizione [In un riferimento (r, θ, z) si scompone così: $\mathbf{x} = r\, \boldsymbol{e}_r + \theta r\, \boldsymbol{e}_\theta + z\, \boldsymbol{e}_z$]

Y Funzione di Bessel del secondo tipo

Lettere greche

α Frazione di vuoto

β Angolo di inclinazione della pala

δ Spessore dello strato cavitante

δ_r Spessore relativo dello strato cavitante, pag. 97

δ_T Spessore dello strato limite termico (Cfr pag. 49)

Δ Differenza finita (Ad esempio $\Delta p = p_{out} - p_{in}$)

ε Eccentricità dell'asse di rotazione

γ Angolo di inclinazione delle pale nel piano meridiano (È l'angolo tra la direzione normale all'asse dell'induttore e l'intersezione della pala con un piano passante per l'asse e la normale stessi)

θ Coordinata azimutale

λ Costante di separazione

μ Coefficiente di viscosità (kg/m s)

ν	Ordine dell'equazione e delle funzioni di Bessel
ρ	Densità (kg/m^3)
ϕ	Coefficiente di flusso (adimensionale)
φ	Potenziale del campo di velocità nel riferimento lagrangiano
ψ	Funzione di corrente (ψ =costante indica una linea di flusso)
ω	Velocità angolare di precessione dell'induttore (È la frequenza di eccitazione)
Ω, Ω^*	Velocità angolare (e valore efficace) di rotazione attorno all'asse z (Senza pedice si riferisce all'induttore)

Pedici

$_1$	Ingresso nell'induttore
$_2$	Uscita dall'induttore
$_B$	Pala
$_c$	Cavitazione
$_C$	Strato cavitante
$_F$	Flusso
$_H$	"Hub" (mozzo)
$_i$	Generico indice ripetuto
$_I$	Interfaccia tra lo strato cavitante e il liquido
$_j$	Indice della pala
$_\ell$	Riferimento lagrangiano solidale al flusso
$_l$	Indice generico
$_L$	Fase liquida
$_m$	Indice generico
$_M$	Valor medio
$_{R,T}$	Direzioni "radiale" e "tangenziale" del riferimento definito a pag. 55
$_t$	Grandezza totale (Ad esempio p_t indica la pressione totale)
$_T$	"Tip" (estremità)
$_v$	Vapore

Le grandezze vettoriali sono rappresentate in grassetto; ad esempio $\mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega}$.
I versori, anch'essi rappresentati in grassetto, sono designati dalla lettera $\boldsymbol{e}$ col pedice dell'asse al quale si riferiscono; ad esempio $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_z$.
Un soprasegno (es. $\overline{p}$) indica che si considera un valore non perturbato, della grandezza. Altrove, in riferimento a numeri complessi, indica il complesso coniugato.
Una tilde (es. $\tilde{p}$) indica la parte perturbativa della grandezza segnata.
Un cappuccio indica la corrispondente grandezza in rappresentazione complessa; ad esempio $\tilde{\varphi} = \mathsf{Re}\{\hat{\varphi}\}$.
Una quantità F mediata nel tempo, tramite una integrazione del tipo $\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t$, è indicata con $\underline{F}$.

CAPITOLO 1

Introduzione

"'Cavitation', as Mr. Froude has suggested to the Authors that the phenomenon should be called, appears to manifest itself when the mean negative pressure exceeds about $6\frac{3}{4}$ lbs. per square inch."
— Ministry Proceedings Institute of Civil Engineers, CXXII, 67, 1895

1.1 Cosa sono le forze rotodinamiche?

Nell'accezione più comune, si chiamano rotodinamiche quelle forze che, per sbilanciamenti o cattive collocazioni dell'albero, nascono e si sviluppano insieme al moto. Questi problemi sono dunque prevalentemente meccanici e strutturali.

Questa tesi si occuperà invece delle forze rotodinamiche indotte dal fluido di lavoro. Esse sono la conseguenza, anziché la causa, dello spostamento e del movimento dell'asse di rotazione del sistema albero-induttore dalla posizione nominale, quali che ne siano le cause. Le forze rotodinamiche possono allora essere conseguenza di flussi attraverso le guarnizioni, l'induttore e i cuscinetti; di perdite e inversioni di flusso; di cavitazione.

Ogni tanto, queste forze provocano una sgradita riduzione delle frequenze critiche dell'albero e perciò una riduzione imprevista del campo operativo.

1.2 Perché studiare le forze rotodinamiche?

È tipico della fisica esprimere le forze in forma di leggi ed è tipico dell'ingegneria investigarne i limiti e l'applicabilità.

Forse la forza di una molla compressa, $f = kx$, è l'esempio più lontano dalle forze rotodinamiche agenti nelle turbomacchine cavitanti e, in tal senso, ne è il paradigma. Innanzitutto, questa è una legge che possiede una scrittura analitica universalmente accettata nel linguaggio della matematica; le forze rotodinamiche, semplicemente, non la hanno, ed al suo posto c'è quella che nel migliore dei casi può essere definita una valida estrapolazione di molti casi sperimentali. In secondo luogo, della formula $f = kx$ si conoscono i limiti al di là dei quali essa non è più valida e si sa con quale altra approssimazione sostituirla quando questi vengono oltrepassati; ma nel caso delle forze rotodinamiche non si sa quanta cavitazione è accettabile prima che il comportamento previsto diventi imprevisto e da sostituire con una estrapolazione diversa — non ancora nota. In terzo luogo, si sa che k dipende dal *sistema* e x dal suo *stato*; d'altro canto non è possibile esprimere il rapporto tra le forze rotodinamiche e gli spostamenti del rotore tramite una funzione di stato della sola posizione del sistema: nel migliore dei casi, risulterà necessaria una descrizione funzionale che contempli almeno la posizione, la velocità, la frequenza.

Spesso si preferisce — ma ciò può essere fuorviante — illustrare il fenomeno in termini di "massa aggiunta". Questo concetto è nato e s'è rivelato utile per *correggere* relazioni del tipo $F = ma$, nei casi pei quali l'accelerazione a risultasse inferiore alle previsioni classiche. Ma quando si tenta di applicare lo stesso concetto nelle turbomacchine, ci si ritrova a dover parlare di una massa aggiunta che non ha più le proprietà scalari tipiche di una massa ma che è anche, nel migliore dei casi, sfasata rispetto alla forza F con una legge che dipende pure dalla pulsazione e che quindi, più che una semplificazione, diventa una ridondante complicazione. Perciò, vista la grande complessità del fenomeno, in questa sede non si cercherà di razionalizzarne il comportamento con l'uso della massa aggiunta, perché ciò risulterebbe in un ulteriore impaccio sterile di vantaggi.

1.3 Perché le forze rotodinamiche sono importanti nelle turbomacchine?

L'affidabilità delle moderne turbomacchine dipende sostanzialmente da quante vibrazioni e rumore esse producono. Buona parte di questi disturbi è legata alla dinamica del rotore e dei componenti ad esso collegati, tra i quali gli induttori.

La vibrazione strutturale limita la prestazione delle turbomacchine. Essa può essere forzata oppure auto-eccitata, a seconda della sorgente di energia. Nel secondo caso, il moto oscillante estrae energia dal fluido e conduce all'instabilità.

L'effetto delle forze rotodinamiche è la vibrazione ovvero lo spostamento ciclico del sistema albero-rotore dalla sua posizione di equilibrio stabile. Un albero rotante spostato dalla sua posizione nominale ha anche lo svantaggio di usurare rapidamente la superficie dell'alloggiamento col quale viene a contatto (Edwards *et al.*, 1999).

I motori per razzi a propellente liquido funzionano a potenze altissime, rendendo il cedimento dei componenti al tempo stesso sia più probabile che in altre turbomacchine, sia più costoso nelle conseguenze.

1.4 Cosa si sa già, cosa non si sa ancòra?

L'orientamento e la posizione del sistema albero-rotore possono essere descritti come un moto di precessione dell'asse dell'albero attorno all'asse della turbomacchina.[1]

Le forze rotodinamiche nascono quando l'induttore si sposta dal centro e inizia un moto di precessione in un'*orbita*. Queste forze sono convenzionalmente decomposte in componenti normale ("radiale") e tangenziale all'orbita.

Per vibrazioni sincrone (tra il moto di precessione e quello di rotazione), tipiche di uno sbilanciamento di massa, l'oscillazione laterale del rotore è un'orbita percorsa alla frequenza di rotazione dell'albero, la cui curva di deflessione è stazionaria nel riferimento solidale al rotore. Per vibrazioni asincrone (il più delle volte subsincrone), tipiche delle forze rotodinamiche, esiste un moto di precessione del rotore a frequenza diversa da quella dell'albero, che viene perciò sottoposto a tensioni oscillanti che sono non-stazionarie sia nel riferimento solidale all'albero sia in quello inerziale.

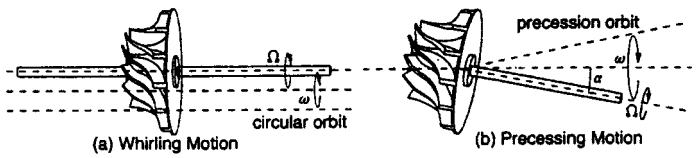
Chiamando con Ω la velocità angolare del rotore e con ω quella di precessione e disegnando le forze rotodinamiche in funzione del rapporto ω/Ω, un risultato tipico per pompe centrifughe è riportato nella figura 1.1. Esso può essere descritto bene con una legge quadratica. Forse il risultato più significativo di queste curve è che esiste un ristretto intervallo di frequenze, poco al di sopra dello zero, con forze tangenziali destabilizzanti. Le forze tangenziali sono infatti stabilizzanti quando del segno opposto di ω/Ω; destabilizzanti quando concordi. Viceversa, le forze radiali sono sempre destabilizzanti quando positive.

Molto poco cambia nel comportamento delle pompe centrifughe se si innesca cavitazione (fig. 1.2). Viceversa, il loro comportamento diventa irregolare e contenente picchi instabili quando diventano significativi gli effetti dovuti alle non uniformità del flusso tra alloggiamento e girante eccentrica (Hiwata e Tsujimoto, 2002).

La situazione è molto diversa — e molto meno chiara — per gli induttori assiali (fig. 1.3). C'è motivo di ritenere che l'andamento delle forze rotodinamiche in questo tipo di pompe possa dipendere pesantemente non soltanto da effetti "secondari" quali il flusso di trafilamento attraverso una luce variabile tra pale e alloggiamento e l'inversione del flusso ma, soprattutto, anche dalla cavitazione. Esso non è mai semplicemente quadratico e presenta numerosi picchi destabilizzanti nelle forze.

Dunque la cavitazione può promuovere il sorgere di pericolose instabilità del modo eccentrico (Rosenmann, 1965), altera sensibilmente il comportamento delle forze rotodinamiche indotte dal fluido (Arndt e Franz, 1986; Brennen, 1994; Bhat-

[1] Nella letteratura tecnica inglese, però, il moto al quale qui ci si riferisce è detto "whirl", mentre con la precessione si indica la nutazione dell'asse del rotore (Hiwata e Tsujimoto, 2002):



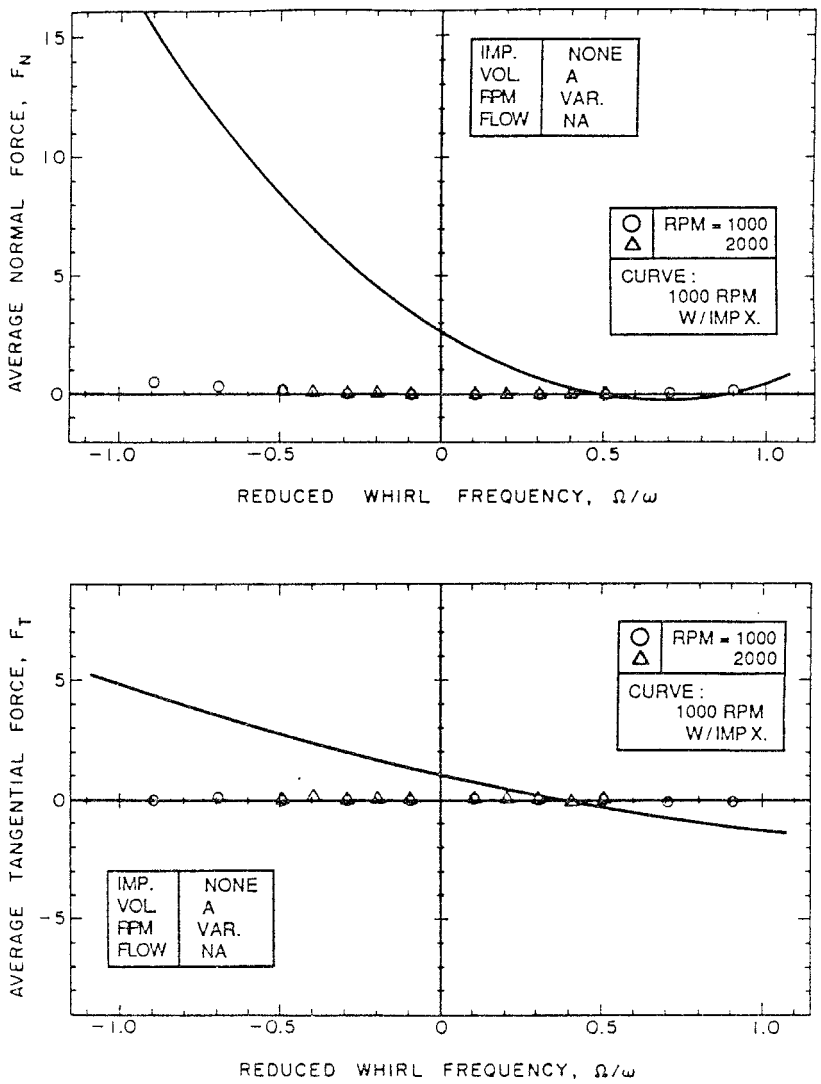


Figura 1.1: Forze radiale e tangenziale dell'induttore X (Jery, 1987) — I dati di riferimento per $\Omega = 1000$ rpm sono riportati nella curva continua

tacharyya *et al.*, 1997), introduce una complicata dipendenza oscillante tra le forze rotodinamiche del fluido e la frequenza del moto eccentrico.

Tutto ciò potrebbe indicare fenomeni di risonanza nel flusso cavitante comprimibile all'interno dei canali delle pale, come conseguenza all'eccitazione provocata dal moto eccentrico del rotore?

Alcune ricerche precedenti si sono concentrate soprattutto sull'analisi delle forze rotordinamiche degli induttori in condizioni non cavitanti (Chamieh *et al.*, 1985; Jery *et al.*, 1985; Jery, 1987; Shoji e Ohasi, 1987; Ohasi e Shoji, 1987; Tsujimoto *et al.*, 1997; Adkins e Brennen, 1988; Uy e Brennen, 1999; Baskharone, 1999). Infatti, a causa della loro maggiore complessità, l'analisi in condizioni cavitanti ha, fino ad oggi, ricevuto un'attenzione inferiore nella letteratura di pubblico dominio.

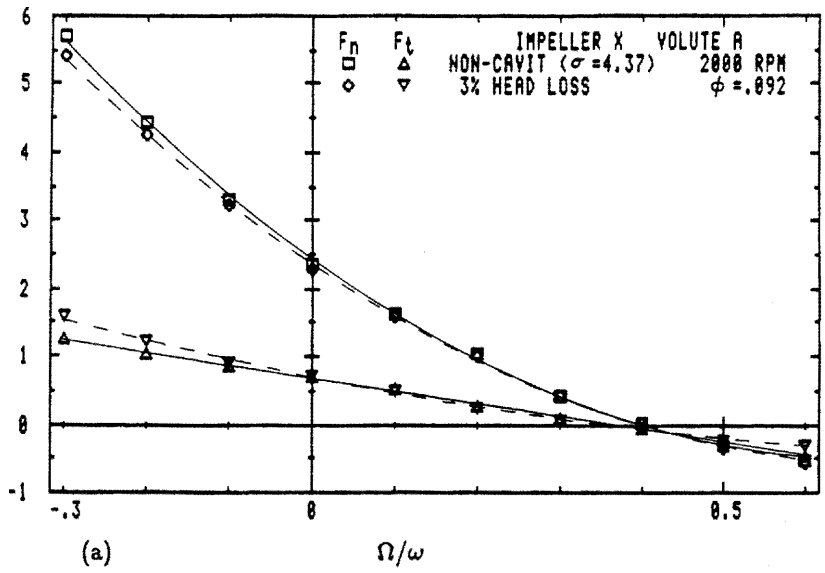
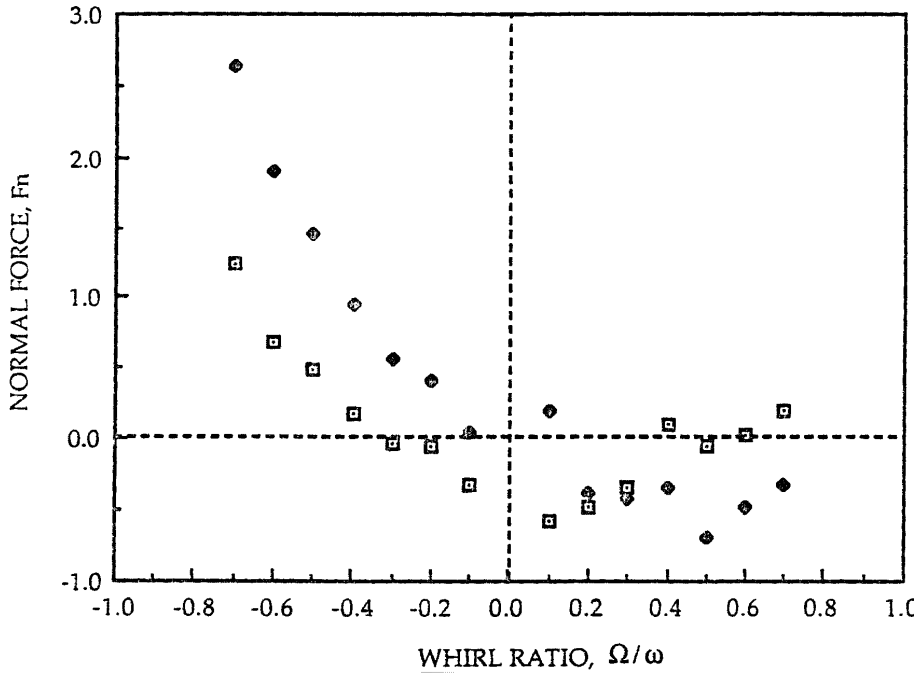
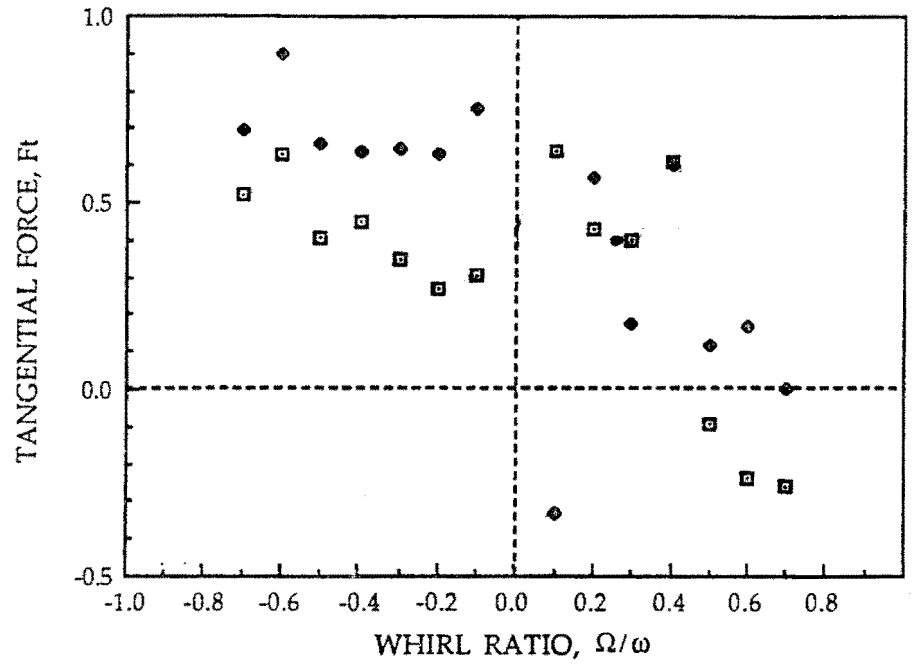


Figura 1.2: Forze radiale e tangenziale dell'induttore X con e senza cavitazione (Franz, 1989)



(a) forza radiale



(b) forza tangenziale

Figura 1.3: Le forze misurate da Bhattacharyya, molto irregolari, per due diversi coefficienti di flusso, in un induttore assiale elicoidale cavitante

1.5 Qual è lo scopo del presente lavoro di tesi?

Lo scopo di questa tesi è colmare il vuoto — particolarmente rarefatto per il caso degli induttori assiali — esistente nelle analisi delle forze rotodinamiche nelle turbopompe cavitanti.

Alcune precedenti ricerche teoriche si sono rivolte al caso di induttori elicoidali infinitamente lunghi, dotati di moto eccentrico, con cavitazione uniformemente distribuita in tutto il fluido (d'Auria *et al.*, 1995; d'Agostino e d'Auria, 1997). Questi risultati hanno confermato la presenza di risonanze interne nel flusso e indicato che gli effetti della dinamica delle bolle non sono importanti — se non, forse, a velocità eccentriche molto elevate. Inoltre, suggeriscono che le ipotesi di cavitazione a bolle uniformemente distribuite e di induttori infinitamente lunghi possono essere responsabili di discrepanze tra le previsioni teoriche e i dati sperimentali.

Questa tesi indaga sul sospetto che possano esistere fenomeni di risonanze interne, coerenti con la rotazione del canale elicoidale attorno all'induttore.

L'indagine è analitica piuttosto che sperimentale, tramite la creazione di un modello matematico. Chiaramente, se un modello include i fenomeni A e B ma non C e D e riesce a riprodurre le caratteristiche osservate, allora esistono ottimi indizi per credere che queste non dipendano da C e D ma piuttosto da A e B. Sono queste le ragioni principali — ancor più che l'amor di semplicità — per considerare un modello molto semplificato, nel quale per esempio non esistono la viscosità e le inversioni di flusso.

Una delle difficoltà in questo còmpito è quindi quella di depurare il più possibile il modello dalle caratteristiche fisiche non ritenute rilevanti — ma non troppo, per evitare di snaturarlo e di perdere perfino le informazioni essenziali.

1.6 Descrizione del lavoro di tesi

La presente tesi indaga sulla dinamica del flusso tridimensionale non stazionario in induttori cavitanti elicoidali di lunghezza finita e successivamente estende l'analisi a giranti centrifughe. Con l'introduzione di alcune adatte ipotesi semplificative, che permettono di ottenere una soluzione in forma chiusa, il flusso viene linearizzato per moti eccentrici di piccola ampiezza e risolto per espansione modale.

Si proseguiranno alcuni lavori precedenti (Marsili, 1995–1996; d'Agostino *et al.*, 1998), i cui modelli matematici saranno migliorati per

- ottenere una migliore corrispondenza *quantitativa* tra i dati sperimentali e la previsione teorica;
- prevedere analiticamente i picchi di forza che si hanno nell'andamento delle forze in corrispondenza di ben definiti rapporti ω/Ω.

Questo verrà fatto rinunciando innanzitutto all'ipotesi di cavitazione omogenea, uniformemente diffusa in tutto l'induttore; negli induttori reali infatti, si assiste a cavitazione eterogenea, enormemente più sviluppata sulla superficie aspirante delle pale (Brennen, 1994, 1995). In questa sede si considererà un flusso monofase nelle equazioni di campo e si introdurrà la cavitazione come condizione al contorno sulla

sola faccia cavitante delle pale. Così facendo, si semplificheranno molti aspetti delle equazioni di governo e, al tempo stesso, si avvicinerà il modello alla situazione reale.

1.6.1 L'orbita studiata

Le prove sperimentali usate come riferimento in questa tesi furono eseguite con orbite di precessione di forma circolare. Tuttavia, negli induttori reali l'orbita ha una forma che non è mai né imposta né esattamente circolare, ma piuttosto irregolare, dipendendo dal sistema di forze e di masse in gioco e coinvolgendo considerazioni strutturali oltre che fluidodinamiche (fig. 1.4).

Cionostante, l'orbita del presente modello è perfettamente circolare; la giustificazione è compiuta, non soltanto nella necessità di riprodurre le condizioni sperimentali e di semplificare il problema. Infatti un'orbita di qualsivoglia complessità è scomponibile sui due assi ortogonali in due quantità oscillanti nel tempo sfasate di 90°, ciascuna delle quali è equivalente ad uno spettro di Fourier nel dominio delle frequenze. A loro volta, ciascuna frequenza considerata singolarmente nel dominio delle frequenze equivale, una volta ricomposta in due dimensioni nel dominio del tempo, a un'orbita circolare.

Pertanto, un'orbita circolare funge da orbita di prova in uno spettro di orbite di qualsiasi forma, proprio come un segnale monocromatico è un segnale di prova per una funzione oscillante più complicata. Un'orbita di eccentricità (raggio) costante può allora rappresentare tutta la dinamica linearizzata, perché — con l'unica limitazione di una *piccola* eccentricità massima — è possibile esaminare la dinamica di orbite qualsiasi semplicemente sovrapponendo linearmente gli effetti di *piccole* orbite circolari.

1.6.2 La soluzione analitica

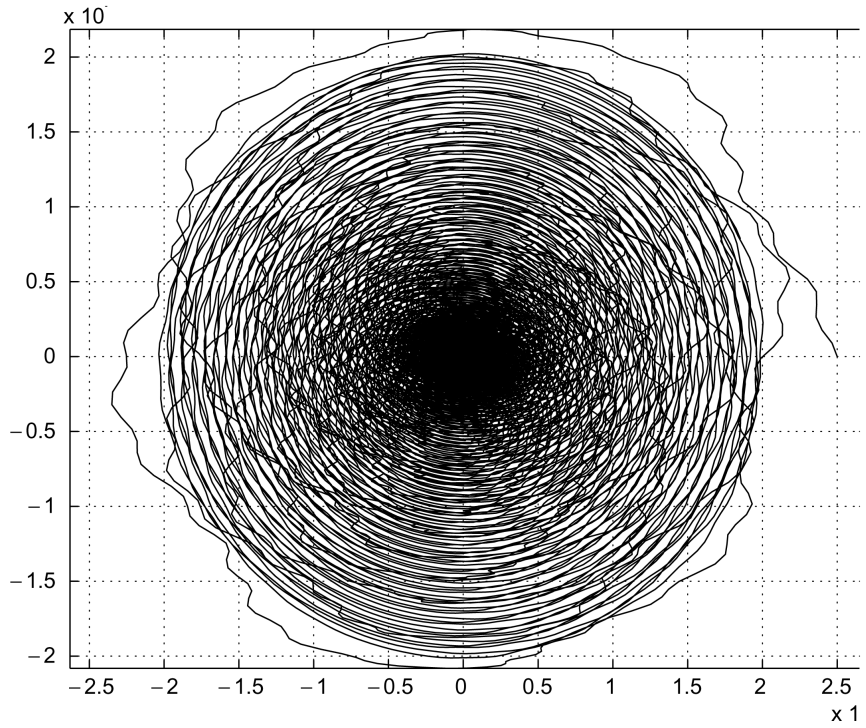
Gli sforzi sono stati tesi a consentire una soluzione in forma chiusa, per gli ovvi benefici che questa comporta (maggior potere predittivo, controllo delle relazioni tra le quantità in gioco e delle grandezze dominanti, eccetera), anche in cambio di qualche maggiore semplificazione formale.

A tal proposito, una posizione di rilievo occupa il problema della soluzione dell'equazione laplaciana per separazione di variabili. Questa non sarebbe stata possibile senza un'opportuna scelta dei sistemi di coordinate e dell'imposizione delle condizioni al contorno (Kalnins e Miller Jr, 1979, 1981, 1983).

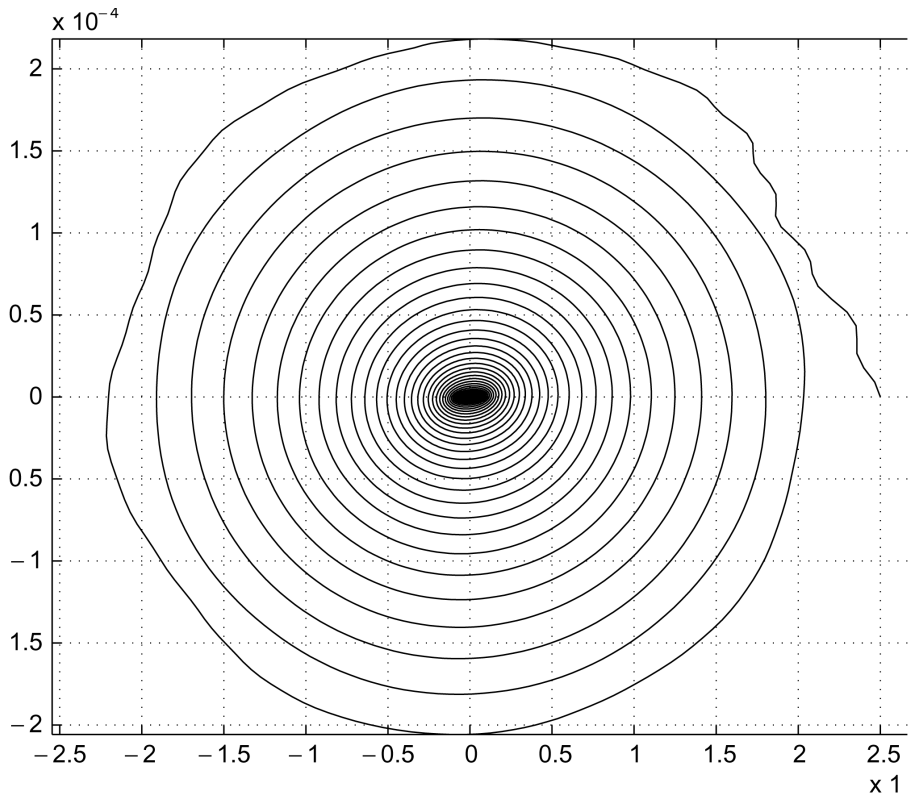
Durante lo svolgimento dei calcoli, alcune volte gli integrali hanno dovuto essere risolti con formule di quadratura, ma più spesso per loro è stata trovata una soluzione analitica, anche grazie all'aiuto di un programma di matematica simbolica (Wolfram-Research, 1999).

La struttura della relazione è la seguente. Verranno innanzitutto presentati e risolti i modelli matematici: quello per l'induttore assiale nel capitolo 2 e quello per l'induttore centrifugo nel capitolo 6. Quindi si illustrerà la procedura per l'integrazione

delle pressioni sulle superfici e per il calcolo delle forze, nei capitoli 3 e 4 per gli induttori elicoidali e solo nel capitolo 7 per le giranti centrifughe. I risultati specifici di ciascun tipoi di induttore saranno mostrati, rispettivamente, nei capitoli 5 e 8. Nel capitolo 9 verranno tratte le conclusioni generali e commentati i risultati ottenuti.



(a) traiettoria non smorzata



(b) traiettoria smorzata

Figura 1.4: Orbita di precessione in funzione del tempo (Kim *et al.*, 2002)

Parte I

Induttori assiali

CAPITOLO 2

Modello matematico per un induttore elicoidale

"On my life, my lord, a bubble."
— *William Shakespeare,* All's Well That Ends Well

2.1 Ipotesi

Flusso imperturbato in ingresso Il flusso imperturbato in ingresso (stadio 1) è (i) *assialsimmetrico*, (ii) *irrotazionale*, (iii) *non viscoso*, (iv) *monofase* e (v) *completamente bagnato*.[1] Esso ha (vi) densità uniforme e costante ρ_L, (vii) pressione totale uniforme e costante $p_{t1} = \overline{p}_{t1}$, (viii) velocità assiale uniforme ($\mathbf{u}_1 = \overline{\mathbf{u}}_1 = \overline{w}_1\ \boldsymbol{e}_z$). (ix) La rotalpia è costante sulla sezione d'uscita (ove il flusso è stazionario).

Geometria dell'induttore L'induttore (fig. 2.1) è costituito da (i) N_B pale elicoidali, (ii) di spessore nullo. (iii) Il mozzo ("hub") e le estremità delle pale ("tip") hanno raggio costante, di valore r_H e r_T. (iv) L'angolo β_T di inclinazione all'estremità delle pale è uniforme; (v) β invece dipende (debolmente) dal raggio ed è piccolo:

$$\beta = \beta(r); \qquad \operatorname{sen}^2 \beta \ll 1.$$

(vi) Il passo assiale è uniforme, sia se misurato all'estremità che a qualsiasi altra sezione:

$$P = 2\pi r \tan \beta = 2\pi r_T \tan \beta_T. \tag{2.1}$$

[1] Un flusso "completamente bagnato" è un flusso non cavitante.

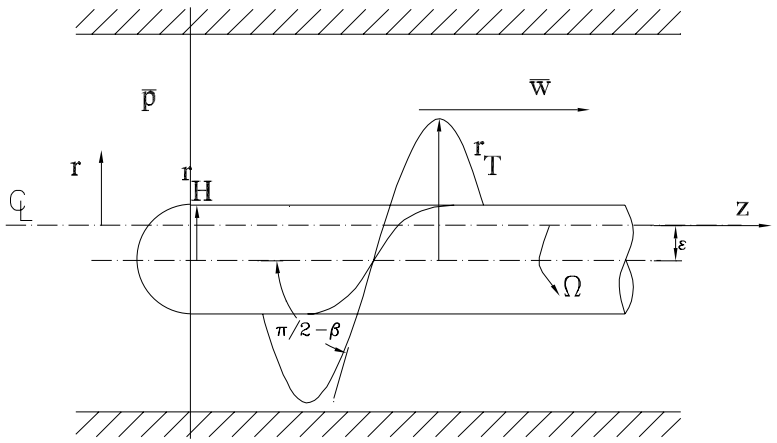


Figura 2.1: Geometria dell'induttore nell'alloggiamento

(vii) Le pale sono radiali nei piani meridiani ($\gamma \equiv 0$ uniformemente), (viii) si avvolgono N_R volte attorno all'asse (ix) ed hanno lunghezza finita $L = N_R P$ in direzione assiale.

Moto dell'induttore (i) Le velocità angolari di rotazione $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\, \boldsymbol{e}_z$ e di precessione $\boldsymbol{\omega} = \omega\, \boldsymbol{e}_z$ dell'induttore sono costanti. (ii) L'eccentricità è costante e piccola: $\varepsilon \ll r_T$. (iii) Il verso di avvolgimento dell'elicoide è tale che ad $\Omega > 0$ corrisponde $\boldsymbol{w}$ concorde con $\boldsymbol{e}_z$.

Flusso imperturbato nell'induttore (i) Il flusso nell'induttore è *monofase*, (ii) assialsimmetrico, (iii) rotazionale, (iv) non viscoso, (v) completamente bagnato, (vi) di densità ρ_L, (vii) di velocità assiale uniforme $\boldsymbol{w} = \overline{w}_z \boldsymbol{e}_z$ e (viii) di velocità radiale nulla. (ix) Sul lato di aspirazione delle pale c'è uno strato sottile ed uniforme di cavitazione, con frazione di vuoto media α. (x) La pressione di cavitazione è costante e coincide con la pressione di vapore: $p_c = p_v(T)$. (xi) Il flusso è completamente guidato.[2]

Flusso imperturbato in uscita Il flusso in uscita è (i) assialsimmetrico, (ii) rotazionale, (iii) non viscoso, (iv) completamente bagnato, (v) di densità ρ_L. Variano radialmente (vi) la pressione totale $\overline{p}_{t2}$ e (vii) la velocità assiale $\mathbf{u}_2 = \overline{\mathbf{u}}_2 = \overline{w}_2\, \boldsymbol{e}_z$. (viii) La rotalpia è costante sulla sezione d'uscita (ove il flusso è stazionario).

[2]Ovvero, la velocità relativa $\mathbf{u}'$ è parallela alla pala, senza alcun angolo di deviazione.

2.2 Flusso medio nell'induttore

Il coefficiente di flusso, definito come

$$\phi = \frac{\overline{w}}{\Omega\, r_T}, \tag{2.2}$$

risulta direttamente legato alla portata. Esso è definito uniforme e costante con r e caratterizza la velocità di traslazione $\overline{w}$.

Per ipotesi, il flusso è completamente guidato e non viscoso e un riferimento solidale col flusso vede l'induttore avvitarsi nel fluido, come se lo "affettasse" con pale di spessore nullo.

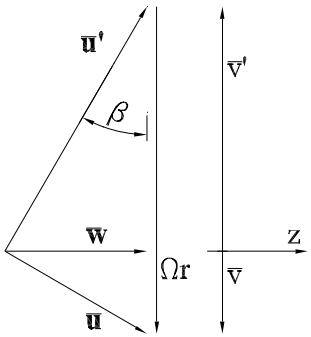


Figura 2.2: Triangolo delle velocità nell'induttore

Affermazione 1. *Il flusso si muove come un corpo rigido nel riferimento assoluto.*

Dimostrazione. Il moto come di un corpo rigido è caratterizzato da una velocità di traslazione e da una di rotazione costanti per ogni particella fluida.

La velocità di traslazione è costante per ipotesi.

Dal triangolo delle velocità (fig. 2.2):

$$\begin{aligned} \overline{v}' &= \overline{w}\, \cot\beta; \\ \overline{v} = \Omega\, r - \overline{v}' &= \Omega\, r - \overline{w}\, \cot\beta = \overline{v}(r). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Allora, la velocità angolare Ω_F di rotazione del flusso risulta pure costante con r, infatti:

$$\Omega_F = \frac{\overline{v}}{r} = \Omega\left(1 - \frac{\overline{w}}{\Omega\, r}\cot\beta\right) = \Omega\left(1 - \frac{\overline{w}}{\Omega\, r_T}\cot\beta_T\right) = \Omega\,(1 - \phi\, \cot\beta_T).$$

□

Corollario 1.1. *La stessa cosa dicasi per il flusso relativo.*

Dimostrazione. Si vede che la velocità angolare Ω'_F è altresì costante, in quanto differenza di due grandezze costanti:

$$\Omega'_F = -\frac{\overline{v}'}{r} = -\frac{\overline{w}}{r}\cot\beta = -\Omega\frac{\overline{w}}{\Omega\, r_T}\cot\beta_T = -\Omega\ \phi\ \cot\beta_T = \Omega_F - \Omega. \tag{2.4}$$

La velocità di traslazione assiale è la stessa: $\overline{w} = \phi\Omega r_T \equiv$ costante. □

La caratteristica di moto come corpo rigido permette di scrivere:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{x} + \overline{\boldsymbol{w}} \quad &\Rightarrow \nabla\times\overline{\mathbf{u}} = -\boldsymbol{\Omega}_F\cdot\nabla\mathbf{x} + (\nabla\cdot\mathbf{x})\boldsymbol{\Omega}_F = 2\boldsymbol{\Omega}_F, \\ \overline{\mathbf{u}}' = \boldsymbol{\Omega}'_F \times \mathbf{x} + \overline{\boldsymbol{w}} \quad &\Rightarrow \nabla\times\overline{\mathbf{u}}' = -\boldsymbol{\Omega}'_F\cdot\nabla\mathbf{x} + (\nabla\cdot\mathbf{x})\boldsymbol{\Omega}'_F = 2\boldsymbol{\Omega}'_F; \end{aligned} \tag{2.5}$$

inoltre, anticipando qui la notazione ($''$) per riferirsi a un riferimento lagrangiano:

$$\overline{\mathbf{u}}'' = \overline{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{x} - \overline{\boldsymbol{w}} = 0.$$

2.2.1 Equazione di equilibrio radiale

L'equazione di Eulero mette in relazione energetica il campo cinematico con il salto di pressione totale:

$$\frac{\text{variazione della pressione totale}}{\text{densità}} = (\text{velocità angolare}) \times (\text{variazione del prodotto del raggio per la velocità tangenziale}).$$

Usando i simboli finora definiti, essendo $\overline{v}_1 = 0$:

$$\frac{\overline{p}_t - p_{t1}}{\rho_L} = \Omega\ r\ \overline{v}. \tag{2.6}$$

Essendo poi $\overline{p} = \overline{p}_t - \frac{1}{2}\rho_L\ \overline{\mathbf{u}}^2 = \overline{p}(r)$ (per definizione di pressione totale), esprimendo $\overline{p}_t$ in funzione di $\overline{p}_{t1}$ tramite la (2.6), può scriversi:

$$\frac{\overline{p}}{\rho_L} = \frac{\overline{p}_t}{\rho_L} - \frac{1}{2}\left(\overline{v}^2 + \overline{w}^2\right) = \frac{p_{t1}}{\rho_L} + \Omega\ r\ \overline{v} - \frac{1}{2}\left(\overline{v}^2 + \overline{w}^2\right). \tag{2.7}$$

Sfruttando le equazioni (2.1) (per evidenziare quantità costanti col raggio) e (2.3), la (2.7) diventa:

$$\frac{\overline{p}}{\rho_L} = \frac{p_{t1}}{\rho_L} + \Omega^2 r^2\left(1 - \phi\cot\beta_T\right) - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2\left(1 - \phi\cot\beta_T\right)^2 - \frac{1}{2}\phi^2\Omega^2 r_T^2;$$

semplificando ulteriormente e derivando rispetto a r, l'equazione di equilibrio radiale assume la forma seguente:

$$\frac{d\overline{p}}{dr} = \rho_L\Omega^2 r(1 - \phi^2\cot^2\beta_T). \tag{2.8}$$

2.3 Sistemi di riferimento

2.3.1 Coordinate cilindriche (r, θ, z)

Si introducano quattro sistemi di riferimento cilindrici (tab. 2.1, pag. 21). Tra di essi esistono le seguenti relazioni.

Riferimento assoluto – relativo $(')$

$$\begin{aligned} r' &= r \\ \theta' &= \theta - \Omega\ t \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2.9}$$

Riferimento assoluto – solidale all'induttore $(^*)$

$$\begin{aligned} r^* &\approx r - \varepsilon\ \cos(\theta - \omega\ t) \\ \theta^* &\approx \theta - \Omega\ t + \frac{\varepsilon}{r}\operatorname{sen}(\theta - \omega\ t) \\ z^* &= z \end{aligned} \tag{2.10}$$

La prima delle (2.10) è il risultato di un'approssimazione al primo ordine in ε, per ε che tende a zero, del teorema di Pitagora generalizzato:

$$r^* = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 - 2\ r\ \varepsilon\ \cos\theta - \omega\ t}.$$

La seconda delle (2.10) è il risultato di un'approssimazione simile ottenuta dal teorema dei seni:

$$\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(\delta\theta) \approx \delta\theta,$$

$$\frac{\delta\theta}{\varepsilon} = \frac{\operatorname{sen}(\theta - \omega\ t)}{r^*},$$

$$\delta\theta = \theta^* - \theta' = \frac{\varepsilon}{r^*}\operatorname{sen}(\theta - \omega\ t) = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}(\theta - \omega\ t)}{r - \varepsilon\cos(\theta - \omega\ t)}.$$

Si confronti la figura 2.3 in cui, per maggior chiarezza, è stata esagerata la dimensione di ε.

Un riferimento solidale all'induttore è indispensabile per esprimere le equazioni delle sue superfici nel modo più compatto e intuitivo possibile. Solo in un riferimento del genere il mozzo e le pale hanno un'espressione relativamente semplice (§2.7).

Riferimento assoluto – solidale al flusso $('')$

$$\begin{aligned} r'' &= r \\ \theta'' &= \theta - \Omega_F\ t \\ z'' &= z - \overline{w}\ t \end{aligned} \tag{2.11}$$

Solidale al flusso $('')$ **– relativo** $(')$

$$\begin{aligned} r' &= r'' \\ \theta' &= \theta'' + (\Omega_F - \Omega)\, t \\ z' &= z'' + \overline{w}\, t \end{aligned} \tag{2.12}$$

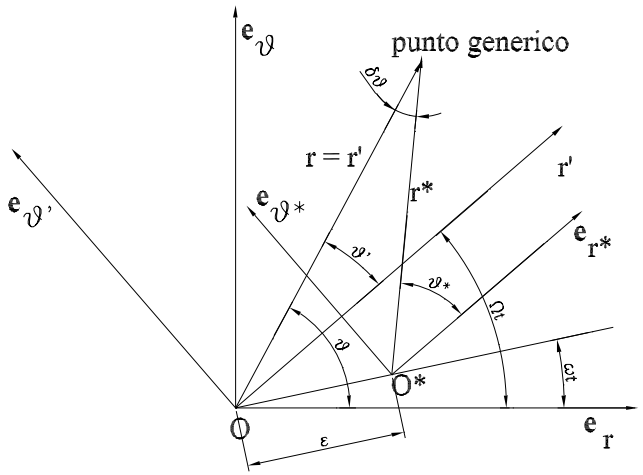


Figura 2.3: Coordinate cilindriche

2.3.2 Coordinate ortonormali elicoidali (r, n, s)

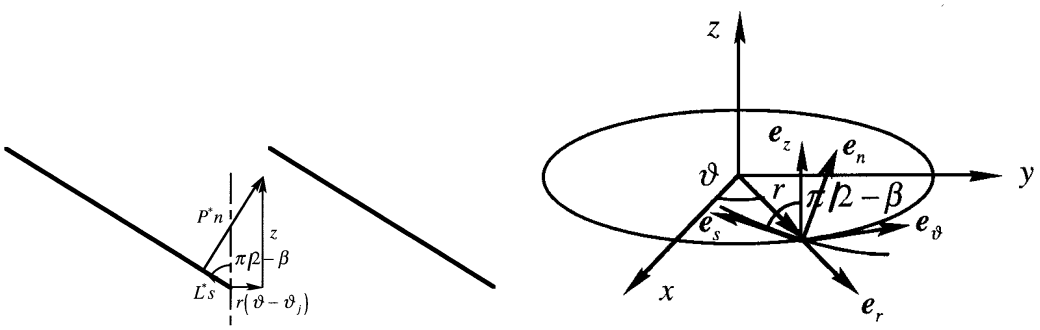


Figura 2.4: Coordinate ortonormali elicoidali

Si presentano quattro sistemi di riferimento (fig. 2.4); alcuni di questi servono solo per introdurre i successivi più agevolmente.

Le coordinate elicoidali vengono ottenute ruotando e traslando le coordinate cilindriche (tab. 2.1), cosicché $\boldsymbol{e}_\theta$ si porta in $\boldsymbol{e}_n$ e $\boldsymbol{e}_z$ si porta in $\boldsymbol{e}_s$. Si osservi che, mentre esiste un solo riferimento — e quindi una sola origine — per le coordinate cilindriche, esistono più riferimenti elicoidali, tanti quante sono le pale, ciascuno dei quali avente l'origine posta all'inizio di ogni j−ma pala.

Il presente sistema di coordinate è ortogonale; un sistema elicoidale non-ortogonale (Manoussaki e Chadwick, 2000), che pure permetterebbe di descrivere con maggiore precisione le sezioni di imbocco e di uscita, forzerebbe una soluzione di tipo numerico.

Le coordinate n e s vengono, rispettivamente, normalizzate con il passo ridotto P^* (larghezza di un canale misurata sul piano meridiano tra una pala e quella successiva) e con la lunghezza L^* del canale (misurata lungo un'elica di raggio r tra due intersezioni contingue con un piano meridiano):

$$P^* = \frac{P}{N_B}\cos\beta = \frac{2\pi\, r}{N_B}\operatorname{sen}\beta, \tag{2.13}$$

$$L^* = \frac{2\pi\, r}{\cos\beta} = \frac{P}{\operatorname{sen}\beta}. \tag{2.14}$$

Con questa normalizzazione, s aumenta di ± 1 facendo una rivoluzione completa attorno all'asse z, mentre n aumenta di ± 1 attraversando longitudinalmente una pala. Le altre coordinate (s', n', ecc.) vengono normalizzate di conseguenza. Pertanto n e s vengono incrementate di ± 1 in seguito ad una rivoluzione completa attorno all'asse o all'attraversamento di una pala.

Tra le coordinate elicoidali e quelle cilindriche esistono le seguenti relazioni basilari. Si osservi che la posizione angolare della j−ma pala è identificata da:

$$\theta_j = \frac{2\pi}{N_B}(j-1), \quad \text{con } j = 1, 2, \ldots, N_B, \tag{2.15}$$

perciò le coordinate r, n, s dello j−mo riferimento sono sempre riferite alla posizione angolare di quella j−ma pala. Ad esempio, l'equazione della j−ma pala nel riferimento solidale al corpo è $n^* = 0$ e deriva direttamente dall'aver posto $\theta^* + \frac{2\pi}{P} z^* = \theta_j$, che è l'equazione della pala nella sua espressione più semplice (scritta nel riferimento solidale al corpo).

Riferimenti assoluti

$$\begin{cases} r|_{cil} = r|_{elic} \\ \theta = \dfrac{2\pi}{N_B} n \operatorname{sen}^2\beta - 2\pi s + \theta_j \\ z = \dfrac{P}{N_B} n \cos^2\beta + P s \end{cases} \qquad \begin{cases} r|_{elic} = r|_{cil} \\ n = N_B \dfrac{\theta - \theta_j}{2\pi} + N_B \dfrac{z}{P} \\ s = \dfrac{z}{P}\operatorname{sen}^2\beta - \dfrac{\theta - \theta_j}{2\pi}\cos^2\beta \end{cases}$$

Riferimenti relativi rotanti

$$\begin{cases} r'|_{cil} = r'|_{elic} \\ \theta' = \dfrac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2\beta - 2\pi s' + \theta_j \\ z' = \dfrac{P}{N_B} n' \cos^2\beta + P s' \end{cases} \qquad \begin{cases} r'|_{elic} = r'|_{cil} \\ n' = N_B \dfrac{\theta' - \theta_j}{2\pi} + N_B \dfrac{z'}{P} \\ s' = \dfrac{z'}{P} \operatorname{sen}^2\beta - \dfrac{\theta' - \theta_j}{2\pi} \cos^2\beta \end{cases} \tag{2.16}$$

Riferimenti solidali al rotore

$$\begin{cases} r^*|_{cil} = r^*|_{elic} \\ \theta^* = \dfrac{2\pi}{N_B} n^* \operatorname{sen}^2\beta - 2\pi s^* + \theta_j \\ z^* = \dfrac{P}{N_B} n^* \cos^2\beta + P s^* \end{cases} \qquad \begin{cases} r^*|_{elic} = r^*|_{cil} \\ n^* = N_B \dfrac{\theta^* - \theta_j}{2\pi} + N_B \dfrac{z^*}{P}; \\ s^* = \dfrac{z^*}{P} \operatorname{sen}^2\beta - \dfrac{\theta^* - \theta_j}{2\pi} \cos^2\beta \end{cases} \tag{2.17}$$

Riferimenti solidali al flusso

$$\begin{cases} r''|_{cil} = r''|_{elic} \\ \theta'' = \dfrac{2\pi}{N_B} n'' \operatorname{sen}^2\beta - 2\pi s'' + \theta_j \\ z'' = \dfrac{P}{N_B} n'' \cos^2\beta + P s'' \end{cases} \qquad \begin{cases} r''|_{elic} = r''|_{cil} \\ n'' = N_B \dfrac{\theta'' - \theta_j}{2\pi} + N_B \dfrac{z''}{P}; \\ s'' = \dfrac{z''}{P} \operatorname{sen}^2\beta - \dfrac{\theta'' - \theta_j}{2\pi} \cos^2\beta \end{cases}$$

2.3.3 Metrica delle coordinate elicoidali

L'elemento metrico nel riferimento elicoidale rotante è

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{e}_{r'} dr' + \boldsymbol{e}_{n'} P^* dn' + \boldsymbol{e}_{s'} L^* ds' \\ &= \boldsymbol{e}_1 h_1 dx_1 + \boldsymbol{e}_2 h_2 dx_2 + \boldsymbol{e}_3 h_3 dx_3, \end{aligned}$$

pertanto, gli operatori *gradiente* e *laplaciano* vengono definiti come segue:

$$\begin{aligned} \nabla' &= \boldsymbol{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \boldsymbol{e}_{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \boldsymbol{e}_{n'} \frac{1}{P^*} \frac{\partial}{\partial n'} + \boldsymbol{e}_{s'} \frac{1}{L^*} \frac{\partial}{\partial s'} \\ &= \boldsymbol{e}_{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \boldsymbol{e}_{n'} \frac{N_B}{P \cos\beta} \frac{\partial}{\partial n'} + \boldsymbol{e}_{s'} \frac{\cos\beta}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial s'}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \nabla'^2 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{N_B^2}{P^2 \cos^2\beta} \frac{\partial^2}{\partial n'^2} + \frac{\cos^2\beta}{4\pi^2 r'^2} \frac{\partial^2}{\partial s'^2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

coordinate	descrizione	asse long.	ruota	trasla	precede	deriva da:	tramite:
		cilindriche					
O,r,θ,z	assoluto statorico	alloggiamento	no	no	no	—	—
O',r',θ',z'	relativo rotante	alloggiamento	Ω	no	no	O,r,θ,z	identità a $t=0$
O^*,r^*,θ^*,z^*	solidale all'induttore	rotore	Ω	no	ω	O',r',θ',z'	trasl. $O \to O^*$ a $t=0$
O'',r'',θ'',z''	solidale al flusso	alloggiamento	Ω_F	$\overline{w}$	no	O,r,θ,z	identità a $t=0$
		ellicoidali					
O,r,n,s	assoluto statorico	—	no	no	no	O,r,θ,z	rot. di $\pi/2-\beta$ intorno a $\mathbf{e}_r$
O,r',n',s'	relativo rotante	—	Ω	no	no	O,r,n,s	identità a $t=0$
O^*,r^*,n^*,s^*	solidale all'induttore	—	Ω	no	ω	O,r,n,s	trasl. di O nell'inizio di ogni pala a $t=0$
O'',r'',n'',s''	solidale al flusso	—	Ω_F	$\overline{w}$	no	O,r,n,s	trasl. di O nell'inizio di ogni pala a $t=0$

Tabella 2.1: Sistemi di coordinate ortonormali

2.4 Equazioni di campo

Affermazione 2. *Le equazioni che governano il flusso nel riferimento assoluto sono:*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \textit{(continuità di massa)}, \tag{2.20}$$

$$\frac{D\,\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho_L} \quad \textit{(quantità di moto)}, \tag{2.21}$$

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \frac{p}{\rho_L} = B(\psi, t) \quad \textit{(equazione di Bernoulli)}. \tag{2.22}$$

B *è costante (solo) su una linea di flusso assoluta a* ψ *=costante;* B *è costante dappertutto solo se il flusso è irrrotazionale (non è questo il caso).*

Dimostrazione. Il primo e il secondo membro del bilancio della quantità di moto possono essere scritti, rispettivamente:

$$\frac{D\,\mathbf{u}}{Dt} = \nabla\left(\int \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\cdot d\mathbf{x}\right) + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\right) - \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u});$$

$$\frac{\nabla p}{\rho_L} = \nabla\left(\frac{p}{\rho_L}\right);$$

perciò l'equazione della quantità di moto si può scrivere:

$$\nabla\left(\int \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \frac{p}{\rho_L}\right) = \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{u})$$

che può essere integrata fino ad ottenere la (2.22). □

L'equazione di Bernoulli è un bilancio di energia meccanica e non aggiunge informazioni perché deriva direttamente dall'equazione di bilancio della quantità di moto; tuttavia, è in una forma più trattabile ed utile per la scrittura delle c.c. perché è una equazione scalare anziché vettoriale.

Affermazione 3. *Le equazioni che governano il flusso nel riferimento lagrangiano sono:*

$$\nabla \cdot \mathbf{u}'' = 0; \tag{2.23}$$

$$\frac{D''\,\mathbf{u}''}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho_L} - 2\,\boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{u}'' - \boldsymbol{\Omega}_F \times (\boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{x}); \tag{2.24}$$

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}''}{\partial t}\cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}''\cdot\mathbf{u}'' - \frac{1}{2}\Omega_F^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + \frac{p}{\rho_L} = B(\psi'', t). \tag{2.25}$$

La costante di Bernoulli B *è uniforme in tutto il flusso quando questo è irrotazionale* ($\nabla\times\mathbf{u} = 0$)*; viceversa, è costante lungo una linea di flusso relativa a* $\psi'' = c$*, con* c *costante.*

Dimostrazione. Per ottenere l'equazione di continuità, si calcola la divergenza della relazione cinematica:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'' + \boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{x} + \overline{\boldsymbol{w}}, \tag{2.26}$$

ottenendo:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}'' + \mathbf{x} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\Omega}_F - \boldsymbol{\Omega}_F \cdot \nabla \times \mathbf{x} = \nabla \cdot \mathbf{u}''$$

e perciò, dalla (2.20), la (2.23).

Per ottenere il bilancio della quantità di moto, se ne calcola, invece, la derivata totale:

$$\frac{D\,\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D''\,\mathbf{u}''}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{u}'' + \boldsymbol{\Omega}_F \times (\boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{x})$$

e si ottiene la (2.24) tramite la (2.21).

Per ottenere l'equazione di Bernoulli va integrata l'equazione:

$$\nabla \left(\int \frac{\partial \mathbf{u}''}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{u}'' - \frac{1}{2}\Omega_F^2\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{p}{\rho_L} \right) = \mathbf{u}'' \times (\nabla \times \mathbf{u}'' + \overbrace{2\boldsymbol{\Omega}_F}^{\text{Coriolis}}) = \mathbf{u}'' \times (\nabla \times \mathbf{u}) \tag{2.27}$$

che si ottiene dal bilancio della quantità di moto tramite le relazioni:

$$\boldsymbol{\Omega}_F \times (\boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{x}) = -\Omega_F^2\, \mathbf{r} = -\nabla \left(\frac{1}{2}\Omega_F^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right),$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\mathbf{u}'' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} + \overline{\boldsymbol{w}}) = \nabla \times \mathbf{u}'' - \boldsymbol{\Omega}_F \cdot \nabla \mathbf{x} + (\nabla \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\Omega}_F = \nabla \times \mathbf{u}'' + 2\boldsymbol{\Omega}_F.$$

Il valore della costante B è dato da:

$$B(\psi'', t) = \int \mathbf{u}'' \times (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{x},$$

facilmente integrabile o nel caso di flusso irrotazionale ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$, ma non è questo il caso) oppure in assenza di forze di Coriolis. □

Affermazione 4. *Le equazioni che governano il flusso nel riferimento relativo sono:*

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0; \tag{2.28}$$

$$\frac{D'\,\mathbf{u}'}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho_L} \underbrace{-2\,\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}'}_{\text{termine di Coriolis}} \underbrace{-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})}_{\text{termine centrifugo}}; \tag{2.29}$$

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' - \frac{1}{2}\Omega^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{p}{\rho_L} = B(\psi', t). \tag{2.30}$$

La costante di Bernoulli B *è uniforme in tutto il flusso quando questo è irrotazionale* ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$)*; viceversa, è costante lungo una linea di flusso relativa a* $\psi' = c$*, con* c *costante.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga al caso precedente del riferimento lagrangiano; la relazione cinematica di partenza è:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}. \tag{2.31}$$

□

2.5 Equazioni di perturbazione

Si considerino le perturbazioni di pressione, di velocità e di posizione, causate dall'eccentricità dell'albero. I valori col soprasegno indicano il valore assunto dalla grandezza quando $\varepsilon = 0$:

$$\tilde{p} = p - \overline{p}; \tag{2.32}$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'' - \overline{\mathbf{u}}'' = \mathbf{u}'', \quad \text{perché } \overline{\mathbf{u}}'' = 0; \tag{2.33}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}' = \mathbf{u}' - \overline{\mathbf{u}}'; \tag{2.34}$$

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \overline{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}} + \overline{\mathbf{r}}'' = \mathbf{r}''. \tag{2.35}$$

Affermazione 5. *Il campo di disturbo di velocità calcolato nel riferimento relativo è uguale a quello calcolato nel riferimento lagrangiano:*

$$\tilde{\mathbf{u}}' = \tilde{\mathbf{u}}'' = \tilde{\mathbf{u}}. \tag{2.36}$$

Dimostrazione. L'eguaglianza deriva direttamente dai seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' &= \tilde{\mathbf{u}}' + \overline{\mathbf{u}}' && \text{(dalla (2.34))} \\
&= \mathbf{u}'' + (\boldsymbol{\Omega}_F - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{x} + \overline{\boldsymbol{w}} && \text{(dalle (2.31) e (2.26))} \\
&= \tilde{\mathbf{u}}' + \boldsymbol{\Omega}_F' \times \mathbf{x} + \overline{\boldsymbol{w}} && \text{(dalla (2.5))} \\
&= \tilde{\mathbf{u}}' + (\boldsymbol{\Omega}_F - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{x} + \overline{\boldsymbol{w}}
\end{aligned}$$

□

2.5.1 Equazioni di perturbazione in presenza delle forze di Coriolis

Affermazione 6. *Le equazioni di governo delle componenti di perturbazione, nel riferimento solidale al flusso, sono:*

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\frac{\nabla \tilde{p}}{\rho_L} - 2\boldsymbol{\Omega}_F \times \tilde{\mathbf{u}}. \tag{2.38}$$

Dimostrazione. La (2.37) deriva direttamente dalle (2.33) e (2.23).

La (2.38) si ottiene dalla (2.24) linearizzando al primo ordine e sottraendo dal bilancio della quantità di moto scritto per il flusso medio. □

Affermazione 7. *Le equazioni di governo delle componenti di perturbazione, nel riferimento relativo, sono:*

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0,$$
$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}}' = -\frac{\nabla \tilde{p}}{\rho_L} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\mathbf{u}}.$$

Dimostrazione. Le equazioni derivano facilmente dalle (2.28) e (2.28), assieme alla (2.36). □

Si vede dunque come le equazioni di perturbazione assumano una forma più semplice nel riferimento lagrangiano, piuttosto che non in quello relativo.

2.5.2 Equazioni di perturbazione senza le forze di Coriolis

Affermazione 8. *Il campo del disturbo di velocità, in assenza delle forze di Coriolis, è irrotazionale e possiede un potenziale* $\tilde{\varphi}$.

Dimostrazione. Il teorema di Kelvin afferma la conservazione della vorticità di un flusso non viscoso, barotropico e soggetto solo a forze conservative.

Il flusso $\mathbf{u}''$ nell'induttore possiede queste caratteristiche, poiché le forze centrifughe sono conservative e quelle di Coriolis, che non lo sono, vengono trascurate. Perciò, ponendosi in un riferimento solidale col fluido, il flusso osservato è irrotazionale ($\nabla \times \mathbf{u}'' = 0$) e ha un potenziale ($\mathbf{u}'' = \nabla\varphi$). Per via della (2.33), la stessa cosa può dirsi del campo di disturbo della velocità:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{u}} = 0; \qquad \tilde{\mathbf{u}} = \nabla\tilde{\varphi}. \tag{2.39}$$

□

Affermazione 9. *Le equazioni di perturbazione, nel riferimento lagrangiano, in assenza delle forze di Coriolis, si scrivono:*

$$\nabla^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{2.40}$$
$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\tilde{p}}{\rho_L} = 0. \tag{2.41}$$

Dimostrazione. Per l'equazione di Laplace (2.40)*:* Si sostituisca nella (2.23) la seconda delle (2.39).
Dimostrazione per l'equazione di bilancio della quantità di moto (2.41)*:* trascurando le forze di Coriolis, il bilancio della quantità di moto, dalla (2.24), è:

$$\frac{\partial \mathbf{u}''}{\partial t} + \mathbf{u}'' \cdot \nabla \mathbf{u}'' \approx -\frac{\nabla p}{\rho_L} - \boldsymbol{\Omega}_F \times (\boldsymbol{\Omega}_F \times \mathbf{x})$$

che può essere integrato nell'equazione di Bernoulli ponendo $2\boldsymbol{\Omega}_F = 0$ nella (2.27):

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}''}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{u}'' - \frac{1}{2}\Omega_F^2\, \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{p}{\rho_L} = \int \mathbf{u}'' \times (\nabla \times \mathbf{u}'') \cdot d\mathbf{x}.$$

Tenendo in considerazione la (2.39), l'equazione di Bernoulli si semplifica in:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}+\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{u}}\cdot\tilde{\mathbf{u}}-\frac{1}{2}\Omega_F^2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}+\frac{p}{\rho_L}=0.$$

D'altra parte, la stessa equazione, scritta per le condizioni imperturbate, è:

$$-\frac{1}{2}\Omega_F^2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}+\frac{\overline{p}}{\rho_L}=0,$$

perciò, eguagliando le due equazioni tra di loro (muovendosi tra due punti che si trovano alla stessa distanza radiale)

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}+\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{u}}\cdot\tilde{\mathbf{u}}-\frac{1}{2}\Omega_F^2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}+\frac{\overline{p}+\tilde{p}}{\rho_L}=-\frac{1}{2}\Omega_F^2\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}+\frac{\overline{p}}{\rho_L}$$

e infine linearizzando (mantenendo, nello sviluppo in serie, solo i termini di ordine 0 e 1), si ottiene la (2.41) cercata. □

Aver trascurato le forze di Bernoulli ha consentito l'integrazione lungo un percorso arbitrario, anziché lungo una linea di corrente relativa, e la scrittura delle equazioni in forma scalare sfruttando un potenziale di velocità.

Le forze di Coriolis non sviluppano lavoro, perciò sono capaci di modificare — al massimo — soltanto le componenti non lavoranti delle forze sull'induttore: queste sono la forza radiale (giacché l'eccentricità è, per ipotesi, costante) e le coppie laterali.

Affermazione 10. *Le equazioni di perturbazione, nel riferimento relativo, in assenza delle forze di Coriolis, si scrivono:*

$$\nabla^2\tilde{\varphi}=0, \tag{2.42}$$

$$\int\frac{\partial\,\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}\cdot d\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}'-\frac{1}{2}\Omega^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}+\frac{p}{\rho_L}=B(t). \tag{2.43}$$

B *è una costante dipendente solo dal tempo (i) su una linea di corrente relativa e (ii) su una linea parallela a* $\boldsymbol{\Omega}_F'$*, ovvero all'asse di rotazione.*

Dimostrazione. Le equazioni di partenza sono la (2.28) e la (2.29), in cui si sia posto $2\boldsymbol{\Omega}=0$:

$$\nabla\cdot\mathbf{u}'=0,$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{u}'}{\partial t}+\mathbf{u}'\cdot\nabla\mathbf{u}'\approx-\frac{\nabla p}{\rho_L}-\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{x}). \tag{2.44}$$

La (2.42) discende allora direttamente dai passaggi seguenti:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{u}'&=\nabla\cdot(\overline{\mathbf{u}}'+\tilde{\mathbf{u}}')\\&=\nabla\cdot(\overline{\mathbf{u}}'+\tilde{\mathbf{u}})\quad\text{(per via della (2.36))}\\&=\nabla\cdot\overline{\mathbf{u}}'\\&=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\Omega}_F'\times\mathbf{x}+\overline{\boldsymbol{w}}\right)\\&=\text{divergenza di un rotore}+\text{divergenza di una costante}=0.\end{aligned}$$

La (2.44) si integra, come già fatto per la (2.27), in:

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' - \frac{1}{2}\Omega^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{p}{\rho_L} = \int \mathbf{u}' \times \nabla \times \mathbf{u}' \cdot d\mathbf{x};$$

d'altra parte, vale:

$$\nabla \times \mathbf{u}' = \nabla \times \tilde{\mathbf{u}} + 2\boldsymbol{\Omega}'_F = 2\boldsymbol{\Omega}'_F,$$

perciò si ottiene

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} \cdot d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' - \frac{1}{2}\Omega^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{p}{\rho_L} = 2\int \mathbf{u}' \times \boldsymbol{\Omega}'_F \cdot d\mathbf{x} = B(t).$$

□

Pertanto, vista la notevole semplicità delle equazioni (2.40) e (2.41) rispetto alle (2.42) e (2.43), per la determinazione della pressione come funzione della velocità è preferibile usare, anche in un riferimento relativo, le equazioni del riferimento lagrangiano:

$$\frac{\partial'' \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\tilde{p}}{\rho_L} = 0$$

in cui

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\mathbf{x}'', t) = \tilde{\varphi}(r'', \theta'', z'', t).$$

Per esprimere questa equazione nel riferimento relativo rotante, si noti che, dalle (2.12):

$$\frac{\partial''}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial t}\frac{\partial'}{\partial t} + \frac{\partial r'}{\partial t}\frac{\partial'}{\partial r'} + \frac{\partial \theta'}{\partial t}\frac{\partial'}{\partial \theta'} + \frac{\partial z'}{\partial t}\frac{\partial'}{\partial z'}$$

e che, essendo ad ogni istante

$$\nabla'' \tilde{\varphi}(r'', \theta'', z'', t) = \nabla' \tilde{\varphi}(r', \theta', z', t) = \tilde{\mathbf{u}}$$

conseguono

$$\tilde{\varphi}(r'', \theta'', z'', t) = \tilde{\varphi}(r', \theta', z', t),$$
$$\frac{\partial'' \tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial' \tilde{\varphi}}{\partial t} + (\Omega_F - \Omega)\frac{\partial' \tilde{\varphi}}{\partial \theta'} + \overline{w}\frac{\partial' \tilde{\varphi}}{\partial z'} = \frac{\partial' \tilde{\varphi}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \tilde{\varphi}.$$

Con questa equazione, il problema di perturbazione in $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{p}$ nel riferimento relativo si scrive:

$$\nabla^2 \tilde{\varphi} = 0, \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial' \tilde{\varphi}}{\partial t} + \overline{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \tilde{\varphi} + \frac{\tilde{p}}{\rho_L} = 0. \tag{2.46}$$

2.6 Equazioni nei sistemi elicoidali

2.6.1 Componenti di velocità nel riferimento elicoidale

Moltiplicando scalarmente prima per $\boldsymbol{e}_r$, poi per $\boldsymbol{e}_\theta$ e infine per $\boldsymbol{e}_z$ la relazione:

$$\boldsymbol{u} = \underbrace{u\,\boldsymbol{e}_r + v\,\boldsymbol{e}_\theta + w\,\boldsymbol{e}_z}_{\text{cilindriche}} = \underbrace{u_r\boldsymbol{e}_r + u_n\boldsymbol{e}_n + u_s\boldsymbol{e}_s}_{\text{elicoidali}}$$

si ottengono le espressioni per passare dalle componenti di velocità scritte in coordinate elicoidali a quelle cilindriche:

$$\begin{aligned} u &= u_r, \\ v &= u_n \operatorname{sen}\beta - u_s \cos\beta, \\ w &= u_n \cos\beta + u_s \operatorname{sen}\beta. \end{aligned}$$

La trasformazione inversa si ottiene risolvendo il sistema per le incognite u_r, u_n e u_s:

$$\begin{aligned} u_r &= u, \\ u_n &= v \operatorname{sen}\beta + w\cos\beta, \\ u_s &= w \operatorname{sen}\beta - v\cos\beta. \end{aligned}$$

2.6.2 Equazioni di perturbazione

La (2.45) si esprime nel riferimento relativo tramite la (2.19):

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r'} + \frac{N_B^2}{P^2\cos^2\beta_M}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial n'^2} + \frac{\cos^2\beta_M}{4\pi^2 r'^2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial s'^2} = 0. \tag{2.47}$$

Con codesta scrittura, s'è sottintesa l'approssimazione $\cos\beta \approx \cos\beta_M$.

2.7 Equazioni delle superfici nel riferimento elicoidale rotante

Le seguenti equazioni identificano le superfici una volta scritte nella forma $b(x, y, z) = 0$. Per ricavarle in diversi sistemi di coordinate sono state usate le relazioni di trasformazione tra un sistema e l'altro (informazioni geometriche) ed il triangolo di velocità (fig. 2.2). La frequenza di eccitazione nel riferimento relativo è indicata con

$$\omega' = \omega - \Omega. \tag{2.48}$$

Per l'alloggiamento:

$$b_C(r, \theta, z, t) = r - r_T = 0; \tag{2.49}$$

$$b_C(r', \theta', z', t) = r' - r_T = 0; \tag{2.50}$$

$$b_C(r', n', s', t) = r' - r_T = 0. \tag{2.51}$$

Per il mozzo:

$$b_H(r^*, \theta^*, z^*, t) = r^* - r_H = 0; \tag{2.52}$$

$$b_H(r', \theta', z', t) = r' - \varepsilon \cos(\theta' - \omega' t) - r_H = 0; \tag{2.53}$$

$$b_H(r', n', s', t) = r' - \varepsilon \cos\left(-2\pi s' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - \omega' t + \theta_j\right) - r_H = 0. \tag{2.54}$$

Per le pale:

$$b_B(r^*, \theta^*, z^*, t) = \theta^* + \frac{z^*}{r^*} \cot \beta - \theta_j^* = 0, \tag{2.55}$$

$$b_B(r', \theta', z', t) = \theta' + \frac{\varepsilon}{r'} \operatorname{sen}(\theta' - \omega' t) + \frac{z'}{r'} \cot \beta - \theta_j = 0, \tag{2.56}$$

$$b_B(r', n', s', t) = \frac{2\pi}{N_B} n' + \frac{\varepsilon}{r'} \operatorname{sen}\left(-2\pi s' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - \omega' t + \theta_j\right) = 0. \tag{2.57}$$

Le superfici $b_B = 0$ identificano elicoidi circolari semplici.

2.8 Sezioni di ingresso e uscita

Descrizioni delle sezioni Le c.c. in ingresso e in uscita andrebbero imposte su due piani coordinati ortogonali all'asse longitudinale, di coordinate $z \equiv$ cost. Tuttavia, in questo modo si renderebbe complicato o impraticabile il problema (descritto in un riferimento elicoidale) di separazione delle variabili.

Si sceglie allora di imporre le c.c. in corrispondenza di un determinato valore costante della coordinate s', ovvero, per ciascuna pala, su un piano, ortogonale ad essa, intermedio tra l'inizio di una pala e della successiva.

Si pone allora:

$$s' = \begin{cases} s'_1 & = -\frac{\cos^2 \beta_M}{2N_B} \quad \text{in ingresso,} \\ s'_2 & = s'_1 + N_R \quad \text{in uscita.} \end{cases}$$

Ipotesi (i) Il flusso di aspirazione è uniforme fino alla sezione di ingresso $(_1)$ dell'induttore; (ii) la pressione di scarico è costante sulla sezione di uscita $(_2)$ dell'induttore.

Condizioni al contorno Le c.c. vengono ricavate dalle ipotesi precedenti tramite l'equazione di Bernoulli linearizzata (2.46), la quale ha $B = 0$ perché il flusso è irrotazionale:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = 0 \quad \text{per } s' = s'_1,\ s'_2. \tag{2.58}$$

2.9 Condizioni al contorno delle superfici solide nel riferimento elicoidale relativo

Le condizioni al contorno sulle superfici di equazione $b = 0$ sono di tipo cinematico:

$$\frac{D'' b}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla'' b = 0 \tag{2.59}$$

(le equazioni $b = 0$ delle superfici sono definite in §2.7 e §2.10).

L'alloggiamento, il mozzo e la faccia "sinistra" di ciascuna pala sono completamente bagnati e la superficie coincide con quella dell'induttore; la faccia "destra" delle pale è cavitante e la superficie da considerare è quella dell'interfaccia, descritta a pag. 33.

Le c.c. si ottengono (i) espandendo la velocità nelle parti stazionaria e perturbativa (ad es. $\mathbf{u}' = \overline{\mathbf{u}}' + \tilde{\mathbf{u}}$), (ii) linearizzando al primo ordine sui disturbi ($\varepsilon = 0$) il prodotto scalare delle equazioni del tipo della (2.59) e (iii) approssimando $\beta \approx \beta_M$.

Essendo $\tilde{\mathbf{u}} = \nabla\tilde{\varphi}$, le componenti di perturbazione di velocità nel riferimento relativo elicoidale sono:

$$\tilde{u}_{r'} = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r'}, \qquad \tilde{u}_{n'} = \frac{N_B}{P\cos\beta_M}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n'}, \qquad \tilde{u}_{s'} = \frac{\cos\beta_M}{2\pi r'}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s'}. \tag{2.60}$$

Per la scrittura delle c.c. è utile richiamare alcuni risultati precedenti:

- $\Omega'_F = -\frac{\overline{w}}{r'}\cot\beta_M$ [eq. (2.4)],
- $\begin{cases} u'_{r'} = u' \\ u'_{n'} = v'\,\mathrm{sen}\,\beta_M + w'\cos\beta_M \\ u'_{s'} = w'\,\mathrm{sen}\,\beta_M - v'\cos\beta_M \end{cases}$ (pag. 28),
- $\overline{\mathbf{u}}' = \boldsymbol{\Omega}'_F \times \boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{w}} = \Omega'_F r' \boldsymbol{e}_{\theta'} + \overline{w}\boldsymbol{e}_{z'}$.

Pertanto:

$$\begin{aligned} &\overline{u}'_{r'} = 0 \quad [\text{perché } \overline{u}'_{r'} = \overline{\mathbf{u}}' \cdot \boldsymbol{e}_{r'} = (\Omega'_F r' \boldsymbol{e}_{\theta'} + \overline{w}\boldsymbol{e}_{z'}) \cdot \boldsymbol{e}_{r'}], \\ &\overline{u}'_{n'} = \Omega'_F r' \,\mathrm{sen}\,\beta_M + \overline{w}\cos\beta_M = 0, \\ &\overline{u}'_{s'} = \overline{w}\,\mathrm{sen}\,\beta_M - \Omega'_F r'\cos\beta_M = -\frac{\Omega'_F r'}{\cos\beta_M} = \frac{\overline{w}}{\mathrm{sen}\,\beta_M}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

L'equazione (2.59) si specializza allora, superficie per superficie, come descritto nei paragrafi seguenti.

Alloggiamento ($r' = r_T$)**:**

$$b_C(r', n', s', t) = r' - r_T = 0; \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned} &u'_{r'} = 0; \\ &\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r'} = 0. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Mozzo ($r' = r_H$)**:**

$$b_H(r', n', s', t) = r' - \varepsilon \cos\left(-2\pi s' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - \omega' t + \theta_j\right) - r_H = 0; \quad (2.54)$$

$$- \varepsilon\omega' \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) + u'_{r'} + \frac{2\pi\varepsilon \operatorname{sen}^2 \beta_M}{P \cos \beta_M} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) u'_{n'} - \frac{\varepsilon \cos \beta_M}{r'} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) u'_{s'} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r'} = \varepsilon(\omega' - \Omega'_F) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right). \quad (2.63)$$

Pale completamente bagnate ($n' = 0$)**:**

$$b_B(r', n', s', t) = \frac{2\pi}{N_B} n' + \frac{\varepsilon}{r'} \operatorname{sen}\left(-2\pi s' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - \omega' t + \theta_j\right) = 0; \quad (2.57)$$

$$- \frac{\varepsilon\omega'}{r'} \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) - \frac{\varepsilon}{r'^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) u'_{r'} + \frac{2\pi}{P \cos \beta_M} u'_{n'} + \frac{2\pi\varepsilon \operatorname{sen}^2 \beta_M}{r' P \cos \beta_M} \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) u'_{n'} - \frac{\varepsilon \cos \beta_M}{r'^2} \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) u'_{s'} = 0;$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n'} = \frac{\varepsilon(\omega' - \Omega'_F) P^2 \cos^2 \beta_M}{2\pi r' N_B} \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right). \quad (2.64)$$

Le condizioni al contorno introducono le eccitazioni nel problema: Il problema considerato è essenzialmente un problema di eccitazione forzata, in cui la forzante non è introdotta come forza esterna (ovvero come termine noto nell'equazione di campo), bensì come eccitazione delle condizioni al contorno (ovvero, tramite l'oscillazione delle superfici). Dalle equazioni sopra scritte si osserva che le eccitazioni introdotte dalle c.c. non-omogenee sono periodiche nel tempo con frequenza ω'.

2.10 Strato cavitante

La cavitazione entra in questo problema solo come condizione al contorno. Di seguito, verranno illustrate prima le ipotesi e poi i risultati dello strato cavitante da considerare sulla pala con $n'' = 1$. Va tenuto presente che, per sviluppare questo modello, s'è deciso di effettuare sostanziali ipotesi semplificative, sia per cogliere l'aspetto più essenziale del fenomeno, sia per non complicare troppo un modello che parte con l'idea di essere un'alternativa facile al flusso bifase. I risultati raggiunti, tuttavia, mostrano che le ipotesi non sono state esageratamente spinte in direzione della semplificazione.

Così come nel modello di strato limite fluidodinamico *si suppone che gli effetti di viscosità dei fluidi risultino osservabili solo all'interno di un certo spessore, similmente il modello presente permette di considerare un flusso che è non cavitante dappertutto, fuorché all'interno di un certo spessore.*

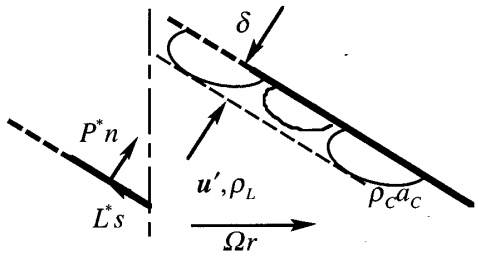


Figura 2.5: Schema dello strato cavitante

Si faccia riferimento alla figura 2.5.

Ipotesi:

1. lo strato è sottile, di spessore $\delta \ll P$ lentamente variabile in direzione s ($\nabla\delta \approx 0$);
2. la densità dello s.c. è:

$$\rho_C = \rho_V\, \alpha + \rho_L\, (1 - \alpha); \tag{2.65}$$

3. la velocità del suono vale $a_C^2 = dp/d\rho_C$;
4. in tutto lo s.c. la pressione totale è uniforme.

Si assume implicitamente che il flusso si riattacchi localmente immediatamente dietro ciascuna tasca di cavitazione, ripristinando la sua pressione totale ai punti di ristagno dell'interfaccia di fase e stabilizzando la stessa pressione che si ha nel flusso a bassa velocità interno alle cavità.

Equazione della superficie di interfaccia: La (2.57) rappresenta l'equazione della pala nel riferimento elicoidale rotante; perciò, al primo ordine in δ, l'equazione del bordo esterno dello strato cavitante sulla stessa pala è:

$$b_B(r', n' + \delta/P^*, s', t) \approx \frac{2\pi}{N_B}(n' + \delta/P^*) + \frac{\varepsilon}{r'} \operatorname{sen}\left(-2\pi s' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - \omega' t + \theta_j\right) = 0 \quad (2.66)$$

la quale descrive la stessa posizione esprimendo l'ordinata della pala come somma di due quantità $(n' + \delta/P^*)$. In questa equazione, $\delta = \delta(t)$ e il passo ridotto (eq. 2.13) è approssimato al raggio medio: $P^* \approx P \cos \beta_M / N_B$.

Condizione al contorno sulle pale cavitanti ($n' = 1$): Si applica la (2.59) alla (2.66):

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n'} + \frac{P \cos \beta_M}{N_B} \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\varepsilon(\omega' - \Omega'_F)\ P^2 \cos^2 \beta_M}{2\pi r' N_B} \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right).$$

In essa, l'equazione di continuità per lo strato cavitante $\rho_C\ \delta \equiv$ costante fornisce:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{\delta}{\rho_C} \frac{\partial \rho_C}{\partial t};$$

la definizione di velocità del suono $a_C^2 = dp_t / d\rho_C$ fornisce:

$$\frac{\partial \rho_C}{\partial t} = \frac{1}{a_C^2} \frac{\partial p_t}{\partial t}$$

e l'equazione di Bernoulli (2.46) fornisce

$$\frac{\tilde{p}_t}{\rho_L} = -\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}.$$

Pertanto:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n'} + \frac{P \cos \beta_M \rho_L \delta}{N_B \rho_C a_C^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon(\omega' - \Omega'_F)\ P^2 \cos^2 \beta_M}{2\pi r' N_B} \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right). \quad (2.67)$$

Validità del modello Si noti che la (2.67), come è lecito aspettarsi, coincide con le condizioni di (i) flusso completamente bagnato (strato incomprimibile) per $a_C \to \infty$ e di (ii) pressione costante ($\partial p / \partial t \to 0$) per $a_C \to 0$.

All'ipotesi del punto 1, pag. 32, corrisponde uno spessore minimo per lo strato cavitante perché il modello sia valido. Esso può stimarsi corrispondente a

$$\frac{\alpha \delta_{min}}{\varepsilon \operatorname{sen} \overline{\beta}} \approx 1. \quad (2.68)$$

Ipotizzando $\alpha \approx 0.1$ e $\varepsilon \operatorname{sen} \overline{\beta} \approx 0.1$ mm, si ottiene $\delta_{min} \approx 1$ mm.

2.11 Separazione dell'equazione di campo

L'eccitazione introdotta, essendo rappresentata dall'eccentricità del mozzo, presenta, nel sistema relativo, periodicità: (i) nel tempo con pulsazione ω_ℓ; (ii) in s'' con lunghezza d'onda $(2\pi)^{-1}$; (iii) in n'' con lunghezza d'onda $2^{-1}N_B\pi^{-1}\operatorname{sen}^{-2}\beta$. Questo suggerisce la seguente:

Separazione delle variabili Per via della pulsazione nel tempo (punto i), si assuma una soluzione della forma:

$$\tilde{\varphi} = \mathrm{Re}\{\hat{\varphi}\} = \mathrm{Re}\left\{R(r'')\ N(n')\ S(s')\ e^{-\imath\omega' t}\right\}, \tag{2.69}$$

dove $\hat{\varphi}$ è una grandezza complessa (possono esserlo anche R, N, S).

Sostituendo la (2.69) nella (2.47), dividendo per $\tilde{\varphi}$ e separando i termini in n', si ottiene:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r'}\frac{R'}{R} + \frac{\cos^2\beta_M}{4\pi^2 r'^2}\frac{S''}{S} = -\frac{N_B^2}{P^2\cos^2\beta_M}\frac{N''}{N}.$$

Entrambi i membri dell'equazione, dipendendo da variabili diverse, possono al più essere identicamente uguali ad una costante *di separazione*. Ponendo $\nu^2 = N''/N$, separando i termini dipendenti da s' e introducendo la seconda costante di separazione $\mu^2 = S''/S$, si ha:

$$\frac{S''}{S} = -\frac{4\pi^2 r'^2}{\cos^2\beta_M}\left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r'}\frac{R'}{R} + \frac{\nu^2 N_B^2}{P^2\cos^2\beta_M}\right) = \mu^2.$$

Questo procedimento di *separazione delle variabili* ha comportato di dover risolvere, invece del problema originale completo, tre *problemi di Sturm-Liouville:*

$$N'' - \nu^2 N = 0, \tag{2.70}$$

$$S'' - \mu^2 S = 0, \tag{2.71}$$

$$R'' + \frac{R'}{r'} + \left(\frac{\nu^2 N_B^2}{P^2\cos^2\beta_M} + \frac{\mu^2\cos^2\beta_M}{4\pi^2 r'^2}\right) R = 0. \tag{2.72}$$

Analisi delle O.D.E. tangenziale e normale Le (2.70) e (2.71) sono equazioni armoniche, perciò le soluzioni S e N finora descritte indicano che la perturbazione, in assenza di sufficiente smorzamento, è sinusoidale, in accordo con i punti (ii) e (iii) di pag. 34.

Le soluzioni generali sono allora[3]:

$$N(n') = c_1 e^{n'\sqrt{\nu^2}} + c_2 e^{-n'\sqrt{\nu^2}}, \tag{2.73}$$

$$S(s') = c_3 e^{s'\sqrt{\mu^2}} + c_4 e^{-s'\sqrt{\mu^2}}. \tag{2.74}$$

[3]Qui e nel seguito si usa il valore principale di una radice complessa:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\ e^{\imath\,(\arg z)/2}$$

Approssimazione dell'O.D.E. radiale Con le posizioni/trasformazioni:

$$x = r'\sqrt{\lambda^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$y(x) = R(r') \quad (y \in \mathbb{C}),$$

segue che:

$$\begin{aligned} R'(r') &= \frac{d\,R(r')}{dr'} = \frac{d\,y(x)}{dr'} = \frac{d\,y(r'\sqrt{\lambda^2})}{dr'}, \\ &= \sqrt{\lambda^2}\,\frac{d\,y(r')}{dr'} = \sqrt{\lambda^2}\,\frac{d\,y(x)}{dx} = \sqrt{\lambda^2}\,y'(x), \\ R''(r') &= \sqrt{\lambda^2}\,\sqrt{\lambda^2}\,y'' = \lambda^2\,y''(x), \end{aligned}$$

e l'equazione (2.72) diventa:

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(\frac{\nu^2 N_B^2}{\lambda^2 P^2 \cos^2\beta_M} + \frac{\mu^2\cos^2\beta_M}{4\pi^2 x^2}\right) R = 0.$$

Questa, con le ulteriori posizioni

$$q^2 = -\frac{\lambda^2\cos^2\beta_M}{4\pi^2}, \tag{2.75}$$

$$\lambda^2 = \frac{\nu^2 N_B^2}{P^2\cos^2\beta_M}, \tag{2.76}$$

può riscriversi nella forma standard moficata di Bessel:

$$y'' + \frac{y'}{x} - \left(1 + \frac{q^2}{x^2}\right) y = 0, \tag{2.77}$$

che ha per soluzione generale:

$$R(r') = c_J\,J_q(x) + c_Y\,Y_q(x) = c_I\,I_q(x) + c_K\,K_q(x). \tag{2.78}$$

Le costanti di separazione (μ e ν) e la forma di $R(r'')$ vengono determinate imponendo le c.c.

Soluzione generale per $\hat{\varphi}$ Dalla fisica del problema si ipotizza che l'unica soluzione di interesse è quella forzata, supponendo che quella libera non sia eccitata (essa è naturalmente smorzata a causa degli effetti dissipativi della dinamica delle bolle che si vogliono simulare). Pertanto, della soluzione *completa* si sa che è somma della soluzione libera, che soddisfa c.c. omogenee in r' e in n' (è sufficiente porre $\omega' = 0$ nelle c.c. esposte in §2.9), e di quella forzata a regime, le cui c.c. in r' e in n' sul mozzo e sulle pale sono non-omogenee. Metendo insieme (2.73), (2.74) e (2.78):

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} = &\left[c_J\,J_q(r'\sqrt{\lambda}) + c_Y\,Y_q(r'\sqrt{\lambda})\right] \\ &\times \left(c_1 e^{n'\sqrt{\nu^2}} + c_2 e^{-n'\sqrt{\nu^2}}\right)\left(c_3 e^{s'\sqrt{\mu^2}} + c_4 e^{-s'\sqrt{\mu^2}}\right)\, e^{-\imath\,\omega' t}. \end{aligned}$$

L'eccitazione è introdotta dall'eccentricità del moto attraverso il mozzo e le pale. La soluzione forzata è pertanto scrivibile come $\tilde{\varphi}_H + \tilde{\varphi}_B$. Le equazioni differenziali di governo sono lineari pertanto vale la sovrapposizione degli effetti considerati agenti separatamente.

2.12 Condizioni al contorno in forma complessa

Tra il campo reale e quello complesso esistono le relazioni:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \in \mathbb{R} \quad &\longleftrightarrow \quad -\imath \exp(\imath x) \in \mathbb{C}; \\ \cos x \in \mathbb{R} \quad &\longleftrightarrow \quad +\exp(\imath x) \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Perciò, dalle c.c. già ricavate in §2.8, §2.9 e §2.10, le c.c. in forma complessa sono le seguenti.

Sull'alloggiamento ($r'' = r_T$), dalla (2.62)**:**

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r'} = 0 \tag{2.79}$$

Sul mozzo ($r'' = r_H$), dalla (2.63)**:**

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r'} = -\imath\varepsilon(\omega' - \Omega'_F) \exp\left[\imath\left(-2\pi s' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - \omega' t + \theta_j\right)\right] \tag{2.80}$$

Sulle pale completamente bagnate ($n'' = j - 1$), dalla (2.64)**:**

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n'} = \frac{\varepsilon(\omega' - \Omega'_F) P^2 \cos\beta_M}{2\pi r' N_B} \exp\left[\imath\left(-2\pi s' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - \omega' t + \theta_j\right)\right] \tag{2.81}$$

Sulle pale cavitanti ($n'' = j$), dalla (2.67)**:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n'} - K_C \omega'^2 \hat{\varphi} = \frac{\varepsilon\ (\omega' - \Omega'_F)\ P^2 \cos^2 \beta_M}{2\pi r' N_B} \\ \times \exp\left[\imath\ \left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right)\right] \end{aligned} \tag{2.82}$$

in cui s'è posto

$$K_C = \frac{\rho_L \delta}{\rho_C a_C^2} \frac{P \cos\beta_M}{N_B}$$

Sulle sezioni di ingresso e uscita ($s' = s'_1, s'_2$), dalla (2.58)**:**

$$\hat{\varphi} = 0 \tag{2.83}$$

2.13 Esame del problema omogeneo

Le condizioni al contorno omogenee in forma complessa per $\hat{\varphi}$ sono:

- sull'alloggiamento, per $r' = r_T$:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r'} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R'(r_T) = 0$$

- sul mozzo, per $r' = r_H$:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r'} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R'(r_H) = 0$$

- sulle pale completamente bagnate, per $n' = j - 1$:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n'} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N'(0) = 0 \tag{2.84}$$

- sulle pale cavitanti, per $n' = j$:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n'} - K_C \omega'^2 \hat{\varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N'(1) - K_C \omega'^2 N(1) = 0 \tag{2.85}$$

- sulle sezioni di ingresso e uscita, per $s' = s'_1, s'_2$:

$$\hat{\varphi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S(s'_1) = S(s'_2) = 0 \tag{2.86}$$

2.14 Problema agli autovalori per l'O.D.E. radiale

Il problema è composto dall'equazione differenziale radiale

$$R'' + \frac{1}{r'} R' + \left(\lambda^2 - \frac{q^2}{r'^2} \right) R = 0$$

e dalle c.c. cinematiche omogenee

$$R'(r_T) = 0, \qquad R'(r_H) = 0. \tag{2.87}$$

Esse corrispondono al caso dell'eccitazione introdotta dalle (sole) pale (§2.19) e sono disaccoppiate (le condizioni imposte sulla variabile dipendente R in ciascuno dei due punti estremi dell'intervallo non dipendono dalle condizioni nell'altro).

Con le posizioni

$$u(r') = \exp \int \frac{dr'}{r'} \propto r' > 0,$$
$$v(r') = -\frac{q^2}{r'} = \frac{\mu^2 \cos^2 \beta_M}{4\pi^2} < 0,$$
$$w(r') = u(r') = r' > 0,$$

l'equazione appare come

$$(u\, R')' + v\, R = -\lambda^2 w\, R, \tag{2.88}$$

la quale è un'*equazione omogenea di Sturm-Liouville.*

L'operatore quasi lineare L'operatore *reale* ($\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$) quasi[4]-lineare di Sturm-Liouville $\mathcal{L}$, tramite il quale è possibile riscrivere la (2.88) come:

$$\mathcal{L}R = -\lambda^2 R, \tag{2.89}$$

è definito da:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{w}\left[\frac{d}{dr'}\left(u\frac{d}{dr'}\right) + v\right]. \tag{2.90}$$

Il suddetto *problema di Sturm-Liouville* è detto *reale* perché u, v, w sono reali e le c.c. sono del tipo $R + c\ R'$, $R = 0$ o $R' = 0$ in uno stesso estremo.

Il problema è detto *regolare* o *proprio* o *non singolare* perché l'intervallo (r_H, r_T) (che ha per estremi i punti in cui si impongono le c.c.) è finito e in questi estremi $w > 0$ e $u > 0$; inoltre, u, v, w e p' sono reali e continue e tali che $w > 0$, $u > 0$, $v \leq 0$ su tutto l'intervallo (r_H, r_T). Gli autovalori $-\lambda^2$ sono generalmente complessi.

Ciò permette di affermare che $\mathcal{L}$ è auto-aggiunto[5] (Zwillinger, 1992, pag. 83, punto 2A).

Gli autovalori Il problema ammette sempre la soluzione banale $R = 0$. Ma, per certi valori $-\lambda_h^2$ (gli *autovalori*), il problema ammette soluzioni non banali e, in corrispondenza di ciascuno di essi, esiste una *autofunzione* R_h, ovvero una soluzione non banale del problema di Sturm-Liouville.

Il fatto che $\mathcal{L}$ sia auto-aggiunto permette di fare importanti affermazioni sugli autovalori:

- gli autovalori sono reali;
- gli autovalori sono numerabili, senza punti di accumulazione;
- le autofunzioni corrispondenti a autovalori distinti sono ortogonali tramite la propria funzione peso $w = \frac{N_B^2 r'}{P\cos^2\beta(r')}$:

$$(R_h, \overline{R}_k) \propto \int_{r_H}^{r_T} R_h R_k r' dr', \quad h \neq k. \tag{2.91}$$

- la soluzione dell'equazione è una funzione analitica, perciò è possibile avere un teorema di completezza per poter ottenere la soluzione con una espansione in serie di autofunzioni.

[4]Non è definito per $w = 0$.

[5]Lequazione radiale, nel lavoro precedente di Marsili, ha l'aspetto:

$$R'' + aR' + (k^2 - 4\pi^2 b - \lambda^2 c)\, R = 0,$$

con $k \in \mathbb{C}$. Ivi l'equazione ha coefficienti reali — e perciò il problema è autoaggiunto — solo nel caso di assenza di smorzamento nella dinamica delle bolle.

Inoltre:

- gli infiniti autovalori $-\lambda_h^2$ di questo problema sono distribuiti in uno *spettro discreto* limitato solo superiormente e sono tutti distinti (semplici, non molteplici);
- R_h e R_k sono linearmente indipendenti se $-\lambda_h^2 \neq -\lambda_k^2$;
- gli autovalori sono negativi;
- λ_h è un numero immaginario puro con $\Im\{\lambda_h\} > 0$; infatti $\lambda_h^2 \in \mathbb{R}^-$, perciò $\lambda_h = \sqrt{\lambda_h^2} = \imath\sqrt{-\lambda_h^2} = \imath\sqrt{a_h}$, con $a_h \in \mathbb{R}^+$;
- lo zero non è un autovalore, poiché (può esserlo se e solo se ν è identicamente nulla su (r_T, r_H).

Per quanto detto, si numerano gli autovalori da 1 in ordine crescente:

$$0 < -\lambda_1^2 < -\lambda_2^2 < -\lambda_3^2 < \dots \qquad \text{con } -\lambda_h^2 \to +\infty \text{ per } i \to \infty.$$

La n–ma autofunzione ha $n-1$ zeri nell'intervallo (r_H, r_T). Le autofunzioni hanno un comportamento oscillatorio simile a quello delle sinusoidi.

Il fatto che i λ_h siano immaginari comporta che la soluzione del potenziale in direzione n'' sia puramente esponenziale e non sinusoidale[6] [vedi le equazioni (2.76) e (2.73)].

Dalle c.c. (2.87):

$$\begin{aligned} R'(r_H) &= c_J \lambda J_q'(\lambda r_H) + c_Y \lambda Y_q'(\lambda r_H) = 0, \\ R'(r_T) &= c_J \lambda J_q'(\lambda r_T) + c_Y \lambda Y_q'(\lambda r_T) = 0, \end{aligned}$$

con $\lambda = \sqrt{\lambda^2} > 0$; per soluzioni non banali bisogna che sia:

$$\begin{Vmatrix} \lambda J_q'(\lambda r_H) & \lambda Y_q'(\lambda r_H) \\ \lambda J_q'(\lambda r_T) & \lambda Y_q'(\lambda r_T) \end{Vmatrix} = \lambda^2 \left[J_q'(\lambda r_H) Y_q'(\lambda r_T) - Y_q'(\lambda r_H) J_q'(\lambda r_T) \right] = 0$$

perciò $\lambda = \lambda_l$ con $l = 1, 2, \dots$ è soluzione di

$$J_q'(\lambda r_H) Y_q'(\lambda r_T) - Y_q'(\lambda r_H) J_q'(\lambda r_T) = 0. \tag{2.92}$$

Risolvendo pei coefficienti c_Y e c_J:

$$c_Y = -c_J \frac{J_q'(\lambda_l r_H)}{Y_q'(\lambda_l r_H)},$$

e, scegliendo $c_J = Y_q'(\lambda_l r_H)$, le autofunzioni risultano:

$$R(r') = R_l(r') = Y_q'(\lambda_l r_H) J_q(\lambda_l r') - J_q'(\lambda_l r_H) Y_q(\lambda_l r'). \tag{2.93}$$

[6] Questo tipo di soluzione, nel lavoro di Marsili, si verifica solo per frequenze delimitate da quella detta *di cut-off*.

2.15 Problema agli autovalori per l'O.D.E. in $S(s')$

Il problema è dato dalla (2.71) con le c.c. (2.86). Ponendo

$$u(s') = 1, \qquad v(s') = 0, \qquad w(s') = 1,$$

l'O.D.E. si scrive

$$(uS')' + (v - \mu^2 w)S = 0$$

ovvero

$$\mathcal{L}S = \mu^2 S$$

con

$$\mathcal{L}S = \frac{1}{w}(uS')' + \frac{v}{w}S.$$

$\mathcal{L}$ è un operatore differenziale quasi lineare, reale; v/w è reale e gli autovalori μ^2 sono in genere complessi. Similmente a quanto visto per l'O.D.E. radiale, si ottiene che

- gli autovalori μ_h^2 sono reali, negativi e unici;
- gli autovalori soddisfano la condizione di ortogonalità

$$(S_h, \overline{S}_k) \propto \int_{s_1'}^{s_2'} S_h S_k \, ds' = 0 \quad \text{per } h \neq k. \tag{2.94}$$

In particolare, dalle (2.74) e (2.86):

$$S(s_1') = c_3 e^{s_1'\sqrt{\mu^2}} + c_4 e^{-s_1'\sqrt{\mu^2}} = 0,$$
$$S(s_2') = c_3 e^{s_2'\sqrt{\mu^2}} + c_4 e^{-s_2'\sqrt{\mu^2}} = 0.$$

Da cui, per soluzioni non banali:

$$\begin{vmatrix} e^{s_1'\sqrt{\mu^2}} & e^{-s_1'\sqrt{\mu^2}} \\ e^{s_2'\sqrt{\mu^2}} & e^{-s_2'\sqrt{\mu^2}} \end{vmatrix} = e^{(s_1'-s_2')\sqrt{\mu^2}} - e^{-(s_1'-s_2')\sqrt{\mu^2}}$$
$$= e^{\imath N_R\sqrt{-\mu^2}} - e^{-\imath N_R\sqrt{-\mu^2}} \propto \operatorname{sen}\left(N_R\sqrt{-\mu^2}\right) = 0,$$

le cui soluzioni per $\sqrt{-\mu^2}$ sono:

$$\sqrt{-m u_m^2} = \frac{m\pi}{N_R}, \quad \text{con } m = 1, 2, \ldots$$

Quindi:

$$c_4 = -c_3\ e^{2s'_1\sqrt{\mu_m^2}}$$

e scegliendo

$$c_3 = e^{-s'_1\sqrt{\mu_m^2}}$$

si ottengono le autofunzioni:

$$\begin{aligned} S(s') = S_m(s') &= e^{(s'-s'_1)\sqrt{\mu_m^2}} - e^{-(s'-s'_1)\sqrt{\mu_m^2}} \\ &= e^{\imath(s'-s'_1)\sqrt{-\mu_m^2}} - e^{-\imath(s'-s'_1)\sqrt{-\mu_m^2}} \\ &\propto \operatorname{sen}\left[(s'-s'_1)\sqrt{-\mu_m^2}\right] \\ &= \operatorname{sen}\frac{m\pi(s'-s'_1)}{N_R}. \end{aligned} \tag{2.95}$$

2.16 Problema agli autovalori per l'O.D.E. in $N(n')$

Il problema è dato dall'equazione armonica (2.70) e dalle c.c. (2.84) e (2.85). Ponendo

$$u(n') = 1, \qquad v(n') = 0, \qquad w(n') = 1,$$

l'O.D.E. si scrive

$$(uN')' + (v - \nu^2 w)N = 0$$

ovvero

$$\mathcal{L}S = \nu^2 S,$$

con

$$\mathcal{L}N = \frac{1}{w}(uN')' + \frac{v}{w}N.$$

$\mathcal{L}$ è un operatore differenziale quasi lineare; v/w è reale e gli autovalori ν^2 sono in genere complessi. Differentemente dalle altre due O.D.E., in questo caso:

- l'operatore $\mathcal{L}$ *non* è autoaggiunto;
- gli autovalori soddisfano la condizione di ortogonalità

$$(N_h, \overline{N}_k) \propto \int_0^1 N_h N_k dn' = 0 \quad \text{per } h \neq k; \tag{2.96}$$

- due autofunzioni corrispondenti agli stessi autovalori sono linearmente dipendenti;

- nulla si può dire sul valore delle autofuzioni.

In particolare, dalla (2.73) e dalle c.c.:

$$N'(0) = c_1\sqrt{\nu^2} - c_2\sqrt{\nu^2} = 0,$$
$$N'(1) - K_C\omega'^2 N(1) = c_1(\sqrt{\nu^2} - K_C\omega'^2)e^{\sqrt{\mu^2}} + c_2(-\sqrt{\nu^2} - K_C\omega'^2)e^{-\sqrt{\mu^2}} = 0;$$

perciò, per non avere soluzioni banali $N = 0$:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\nu^2} & -\sqrt{\nu^2} \\ (\sqrt{\nu^2} - K_C\omega'^2)e^{\sqrt{\mu^2}} & (-\sqrt{\nu^2} - K_C\omega'^2)e^{-\sqrt{\mu^2}} \end{vmatrix}$$
$$= 2\imath\sqrt{-\nu^2}\left[-K_C\omega'^2\cos\sqrt{-\nu^2} - \sqrt{-\nu^2}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{-\nu^2}\right] = 0.$$

Quindi gli autovalori (eliminando la soluzione irrilevante $\sqrt{-\nu^2} = 0$) sono dati dalle soluzioni di

$$\sqrt{-\nu^2}\tan\sqrt{-\nu^2} = -K_C\omega'^2,$$

le cui soluzioni complesse per $\sqrt{-\nu^2}$ sono le intersezioni $\sqrt{-\nu_k^2}$ (con k intero) dell'iperbole $-K_C\omega'^2/\sqrt{-\nu^2}$ con i rami di $\tan\sqrt{-\nu^2}$. Le corrispondenti autofunzioni $N_k(n')$ vengono quindi ottenute con $c_1 = c_2$:

$$N(n') = N_k(n') = c_1\left(e^{n'\sqrt{\nu_k^2}} + e^{-n'\sqrt{\nu_k^2}}\right)$$
$$\propto e^{\imath n'\sqrt{-\nu_k^2}} + e^{-\imath n'\sqrt{-\nu_k^2}} \propto \cos\left(n'\sqrt{-\nu_k^2}\right). \quad (2.97)$$

In altri termini, risolvendo l'equazione

$$z\,\tan z = -K_C\omega'^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

si ottengono direttamente z_k che sono già i valori $\sqrt{-\nu_k^2}$ cercati.

2.17 Schema per l'ottenimento della soluzione

Per via della linearità del problema, la soluzione completa è somma delle soluzioni dovute alle eccitazioni indipendenti del mozzo e delle pale.

Soluzione per l'eccitazione del mozzo: Il problema è caratterizzato da c.c. omogenee per N e S e da c.c. non omogenee per R. I due problemi omogenei (già esaminati) per N e per S producono, rispettivamente, gli autovalori ν_k^2 e μ_m^2. Funzioni di questi sono i coefficienti $q_m = q_m(\mu_m)$ e $\lambda_k = \lambda_k(\nu_k)$, determinati tramite le equazioni/definizioni (2.75) e (2.76); vengono pertanto "ereditati" gli indici liberi m e k. Nella soluzione per l'eccitazione del mozzo, R è la soluzione generale (2.78) (i cui coefficienti incogniti sono ancòra da determinarsi, non essendo quelli ottenuti trattando il problema omogeneo, che qui non si applica), mentre N e S sono ottenute tramite l'espansione nelle autofunzioni già determinate, (2.97) e (2.95). I coefficienti incogniti in R si determinano applicando le condizioni di ortogonalità (2.96) e (2.94) per N e per S alla c.c. non omogenea su R.

Soluzione per l'eccitazione delle pale: Il problema è caratterizzato da c.c. omogenee per R e S e da c.c. non omogenee per N. I due problemi omogenei (già esaminati) per R e per S producono, rispettivamente, gli autovalori λ_l^2 (che risultano essere λ_{lm}^2 per via dell'ulteriore dipendenza da q_m) e μ_m^2. Funzione di questi ultimi sono i coefficienti $q_m = q_m(\mu_m)$ (2.75); vengono pertanto "ereditati" gli indici liberi m e l. Nella soluzione per l'eccitazione delle pale, N è ancòra la soluzione generale, mentre R e S sono ottenute tramite l'espansione nelle autofunzioni già determinate, (2.93) e (2.95). I coefficienti incogniti in N si determinano applicando le condizioni di ortogonalità (2.91) e (2.94) per R e per S alla c.c. non omogenea su N.

2.18 Soluzione per l'eccitazione del mozzo

Si confronti la figura 2.6.

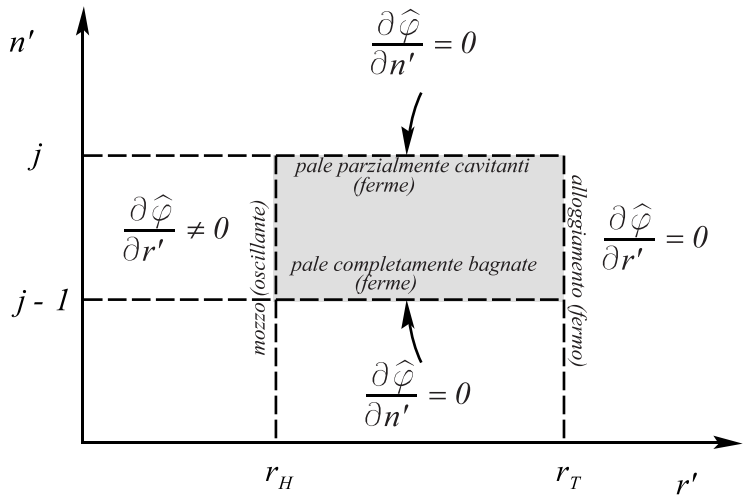


Figura 2.6: Condizioni al contorno per l'eccitazione introdotta solo dal mozzo

Per calcolare la prima parte della soluzione, si suppone che le pale siano ferme (nel riferimento relativo) e che la sola eccitazione introdotta sia quella del mozzo.

Le condizioni al contorno seguono direttamente da quanto esposto in §2.12:

1. sull'alloggiamento (fermo) vale la (2.79);
2. sul mozzo (oscillante) vale la (2.80);
3. sulle pale completamente bagnate (ferme):

$$\left.\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial n'}\right|_{n'=j-1} = 0, \qquad\qquad j = 1, \ldots, N_B;$$

4. sulle pale cavitanti (ferme):

$$\left.\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial n'}\right|_{n'=j} = 0, \qquad\qquad j = 1, \ldots, N_B;$$

5. sulle sezioni di ingresso e uscita vale la (2.83).

Quindi la soluzione dell'eccitazione del mozzo è:

$$\hat{\varphi}_H = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} R_{km}(r')N_k(n')S_m(s')\, e^{-\imath\omega' t} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \left[c_J J_{q_m}(\lambda_k r') + c_Y Y_{q_m}(\lambda_k r')\right] N_k(n')S_m(s')\, e^{-\imath\omega' t},$$

in cui, per via della (2.76):

$$\lambda_k = \sqrt{\lambda_k^2} = \imath\frac{N_B}{P\cos\beta_M}\sqrt{-\nu_k^2} = \imath\lambda_k^*$$

e per via della (2.75), posto $m^2 = -\frac{\mu_m^2 N_R^2}{\pi^2}$:

$$q_m = \sqrt{q_m^2} = \frac{m\cos\beta_M}{2N_R}.$$

La soluzione può anche scriversi, cambiando le funzioni di Bessel [$J(\imath x) \propto I(x)$ e $Y(\imath x) \propto K(x)$]:

$$\hat{\varphi}_H = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \left[c_I I_{q_m}(\lambda^* r') + c_K K_{q_m}(\lambda^* r')\right] N_k(n')S_m(s')\, e^{-\imath\omega' t}.$$

Con questa scrittura, le c.c. radiali diventano:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_k^* \left[c_I I'_{q_m}(\lambda_k^* r_H) + c_K K'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)\right] N_k(n')S_m(s') = -\imath\varepsilon(\omega' - \Omega'_T)\exp\left[\imath\left(\frac{2\pi}{N_B}n'\,\mathrm{sen}^2\,\beta_M - 2\pi s' + \theta_j\right)\right],$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\lambda_k^*\left[c_I I'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)+c_K K'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)\right]N_k(n')S_m(s')=0.$$

I coefficienti c_I e c_K vengono determinati sfruttando le condizioni di ortogonalità (2.94) e (2.96):

$$\int_0^1 N_h(n')N_k(n')dn'=\int_0^1\cos\left(n'\sqrt{-\nu_h^2}\right)\cos\left(n'\sqrt{-\nu_k^2}\right)dn'=0,$$

$$\int_{s_1'}^{s_1'+N_R} S_h(s')S_m(s')ds'=\int_{s_1'}^{s_1'+N_R}\operatorname{sen}\left[(s'-s_1')\sqrt{-\mu_h^2}\right]\operatorname{sen}\left[(s'-s_1')\sqrt{-\mu_m^2}\right]ds'=0,$$

insieme alle relazioni

$$\int_0^1 N_k^2(n')dn'=\int_0^1\cos^2\left(n'\sqrt{-\nu_k^2}\right)dn'=\frac{1}{\sqrt{-\mu_k^2}}\int_0^{\sqrt{-\mu_k^2}}\frac{1+\cos(2x)}{2}dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-\nu_k^2}}\left[\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right]_0^{\sqrt{-\nu_k^2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\operatorname{sen}\left(2\sqrt{-\nu_k^2}\right)}{2\sqrt{-\nu_k^2}}\right),$$

$$\int_{s_1'}^{s_1'+N_R} S_m^2(s')ds'=\int_{s_1'}^{s_1'+N_R}\operatorname{sen}^2\left[(s'-s_1')\sqrt{-\mu_m^2}\right]ds'$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-\mu_m^2}}\int_0^{\sqrt{-\mu_m^2}N_R}\operatorname{sen}^2 x\,dx=\frac{N_R}{m\pi}\left[\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right]_0^{m\pi}=\frac{N_R}{2}.$$

Moltiplicando le c.c. per $N_k(n')S_m(s')$ e integrando due volte, si ottengono le condizioni:

$$\lambda_k^*\left[c_I I'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)+c_K K'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)\right]\frac{N_R}{4}\left[1+\frac{\operatorname{sen}\left(2\sqrt{-\nu_k^2}\right)}{2\sqrt{-\nu_k^2}}\right]$$
$$=-\imath\varepsilon(\omega'-\Omega_F')e^{\imath\theta_j}\int_0^1 e^{\imath(2\pi n'/N_B)\operatorname{sen}^2\beta_M}N_k(n')dn'\int_{s_1'}^{s_2'}e^{-\imath 2\pi s'}S_m(s')ds',$$

$$\lambda_k^*\left[c_I I'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)+c_K K'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)\right]\frac{N_R}{4}\left[1+\frac{\operatorname{sen}\left(2\sqrt{-\nu_k^2}\right)}{2\sqrt{-\nu_k^2}}\right]=0,$$

le quali, definendo implicitamente $\mathcal{I}_{km}$, si scrivono:

$$c_I I'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)+c_K K'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)=\mathcal{I}_{km},$$
$$c_I I'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)+c_K K'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)=0.$$

Esse vengono risolte per c_I e c_K, coi quali la funzione radiale (2.78) si scrive:

$$R_{km}(r')=\mathcal{I}_{km}\frac{K'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)I_{q_m}(\lambda_k^* r')-I'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)K_{q_m}(\lambda_k^* r')}{I'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)K'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)-K'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)I'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)}.$$

2.19 Soluzione per l'eccitazione delle pale

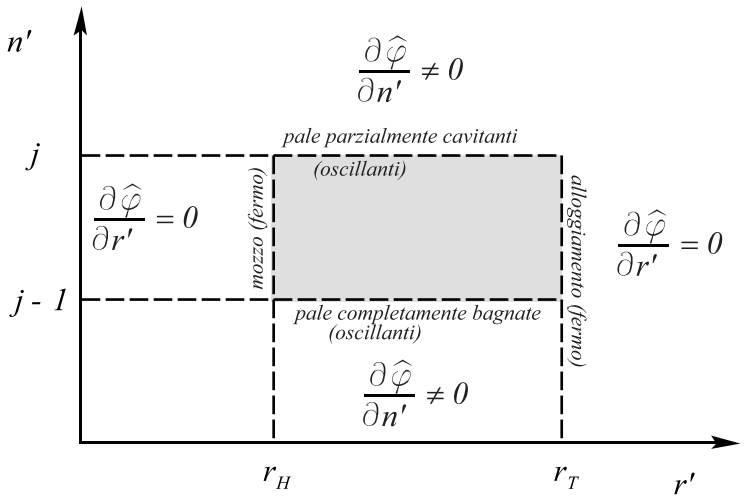


Figura 2.7: Condizioni al contorno per l'eccitazione introdotta solo dalle pale

Si confronti la figura 2.7. Si suppone che il mozzo sia fermo rispetto al flusso e che soltanto le pale introducono un'eccitazione nel flusso.

Le condizioni al contorno Seguono direttamente da quanto esposto in §2.12.

1. Sull'alloggiamento (fermo) vale la (2.79);
2. sul mozzo (fermo) vale la (2.80) con $\omega' = \omega'_F$, ovvero eq. (2.79);
3. sulle pale completamente bagnate (oscillanti) vale la (2.81);
4. sulle pale cavitanti (oscillanti) vale la (2.82);
5. sulle sezioni di ingresso e uscita vale la (2.83).

La soluzione per l'eccitazione delle pale risulta:

$$\hat{\varphi}_B = \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} R_{lm}(r')N_{lm}(n')S_m(s')e^{-\imath\omega' t} = \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} R_{lm}(r')\left(c_1 e^{\nu_{lm}n'} + c_2 e^{-\nu_{lm}n'}\right) S_m(s')e^{-\imath\omega' t}.$$

La funzione radiale è:

$$R_{lm}(r') = Y'_{q_m}(\lambda_{lm}r_H)J_{q_m}(\lambda_{lm}r') - J'_{q_m}(\lambda_{lm}r_H)Y_{q_m}(\lambda_{lm}r');$$

gli autovalori $\lambda_{lm} = \sqrt{\lambda^2_{lm}} > 0$ sono soluzioni non banali della (2.92) e, dalla (2.76), si ha che:

$$\nu_{lm} = \sqrt{\nu^2_{lm}} = \lambda_{lm}\frac{P\cos\beta_M}{N_B}.$$

Perciò, le c.c. sulla pala si scrivono

$$\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} R_{lm}(r')\nu_{lm}(c_1-c_2)S_m(s') = \frac{\varepsilon(\omega'-\Omega'_F)P^2\cos^2\beta_M}{2\pi r' N_B} e^{\imath(-2\pi s'+\theta_j)},$$

$$\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} R_{lm}(r')\left[c_1\left(\nu_{lm}-K_C\omega'^2\right)e^{\nu_{lm}} + c_2\left(-\nu_{lm}-K_C\omega'^2\right)e^{-\nu_{lm}}\right]S_m(s') = \frac{\varepsilon(\omega'-\Omega'_F)P^2\cos\beta_M}{2\pi r' N_B}\exp\left[\imath\left(\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}^2\beta_M - 2\pi s' + \theta_j\right)\right].$$

I coefficienti c_1 e c_2 vengono determinati usando le condizioni di ortogonalità (2.91) e (2.94)

$$\int_{r_H}^{r_T} R_{hm}(r')R_{lm}(r')r'dr' = 0,$$

$$\int_{s'_1}^{s'_1+N_R} S_h(s')S_m(s')ds' = \int_{s'_1}^{s'_1+N_R} \operatorname{sen}\left[(s'-s'_1)\sqrt{-\mu_h^2}\right]\operatorname{sen}\left[(s'-s'_1)\sqrt{-\mu_m^2}\right]ds' = 0,$$

e le relazioni

$$\mathcal{I}_{R^2_{lm}} = \int_{r_H}^{r_T} R^2_{lm}(r')r'dr',$$

$$\int_{s'_1}^{s'_1+N_R} S^2_m(s')ds' = \int_{s'_1}^{s'_1+N_R} \operatorname{sen}^2\left[(s'-s'_1)\sqrt{-\mu_m^2}\right]ds' = \frac{1}{\sqrt{-\mu_m^2}}\int_0^{\sqrt{-\mu_m^2}N_R}\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{N_R}{m\pi}\left[\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}\right]_0^{m\pi} = \frac{N_R}{2}.$$

Quindi, moltiplicando queste relazioni per $r'R_{lm}(r')S_m(s')$ e integrando due volte:

$$\mathcal{I}_{R^2_{lm}}\nu_{lm}(c_1-c_2)\frac{N_R}{2} = \frac{\varepsilon(\omega'-\Omega'_F)P^2\cos^2\beta_M}{2\pi N_B}e^{\imath\theta_j}\int_{r_H}^{r_T}R_{lm}(r')dr'\int_{s'_1}^{s'_1+N_R}e^{-\imath 2\pi s'}S_m(s')ds',$$

$$\mathcal{I}_{R^2_{lm}}\left[c_1(\nu_{lm}-K_C\omega'^2)e^{\nu_{lm}} + c_2(-\nu_{lm}-K_C\omega'^2)e^{-\nu_{lm}}\right]\frac{N_R}{2} = \frac{\varepsilon(\omega'-\Omega'_F)P^2\cos^2\beta_M}{2\pi N_B}e^{\imath\left[(2\pi/N_B)\operatorname{sen}^2\beta_M+\theta_j\right]}\int_{r_H}^{r_T}R_{lm}(r')dr'\int_{s'_1}^{s'_1+N_R}e^{-\imath 2\pi s'}S_m(s')ds',$$

ovvero, definendo $\mathcal{I}_0$ e $\mathcal{I}_1$:

$$c_1 - c_2 = \mathcal{I}_0,$$
$$c_1(\nu_{lm} - K_C\omega'^2)e^{\nu_{lm}} + c_2(-\nu_{lm} - K_C\omega'^2)e^{-\nu_{lm}} = \mathcal{I}_1.$$

Risolvendo per c_1 e c_2 e sostituendo in $N_{lm}(n') = c_1 e^{\nu_{lm}n'} + c_2 e^{-\nu_{lm}n'}$ si ha:

$$N_{lm}(n') = \frac{\left[\mathcal{I}_0(-\nu_{lm} - K_C\omega'^2)e^{-\nu_{lm}} + \mathcal{I}_1\right] e^{\nu_{lm}n'} + \left[\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_0(\nu_{lm} - K_C\omega'^2)e^{\nu_{lm}}\right] e^{-\nu_{lm}n'}}{(-\nu_{lm} - K_C\omega'^2)e^{-\nu_{lm}} + (\nu_{lm} - K_C\omega'^2)e^{\nu_{lm}}}$$
$$\times \frac{\mathcal{I}_1 \cosh \nu_{lm}n' - \mathcal{I}_0\left[K_C\omega'^2 \operatorname{senh} \nu_{lm}(n'-1) + \nu_{lm}\cosh \nu_{lm}(n'-1)\right]}{\nu_{lm}\operatorname{senh}\nu_{lm} - K_C\omega'^2\cosh\nu_{lm}}.$$

Può osservarsi che la soluzione è singolare (ed il problema è risonante) per

$$\nu_{lm}\operatorname{senh}\nu_{lm} - K_C\omega'^2\cosh\nu_{lm} = 0;$$

pertanto, il sistema ha un insieme infinito di frequenze naturali complesse:

$$\omega'_{lm} = \omega_{lm} - \Omega = \pm\sqrt{\frac{\nu_{lm}\tanh\nu_{lm}}{K_C}}. \tag{2.98}$$

I picchi delle forze si addenseranno al crescere di K_C, ovvero ad un "aumento" della cavitazione; essi sono simmetrici rispetto a Ω.

2.20 Il parametro $\mathcal{C}$ ed il modello isoentalpico

L'entità della cavitazione è ben descritta dalla parte reale del parametro K_C, il quale è di ordine 10^{-5} s^{-2}. È perciò comodo definire un parametro adimensionale

$$\mathcal{C} = \operatorname{Re}\{K_C\}\Omega^2 \tag{2.99}$$

che risulta di ordine 10 nel campo di funzionamento d'interesse.

La quantità $\mathcal{C}$ è direttamente proporzionale alla dimensione dello strato cavitante δ e alla sua impedenza acustica $(\rho_C a_C^2)^{-1}$. Nella figura 2.9, i grafici danno un'idea di quali siano i valori delle grandezze fisiche della velocità del suono nello strato cavitante e del suo spessore che permettano di ottenere certi valori di K_C.

Si presenta la necessità di legare $\mathcal{C}$ con una quantità più universalmente nota per la descrizione dell'entità di cavitazione. Assegnato parametricamente uno spessore relativo δ/P^*, s'è legata l'impedenza acustica alla frazione di vuoto α dello strato cavitante, tramite un modello isoentalpico (Brennen, 1995, cap. 6) modificato (Rapposelli e d'Agostino, 2001; d'Agostino *et al.*, 2001).

Questo modello isoentalpico fornisce per l'impedenza una relazione di tipo

$$\frac{1}{\rho_C a_C^2} = f_1(p, \alpha)$$

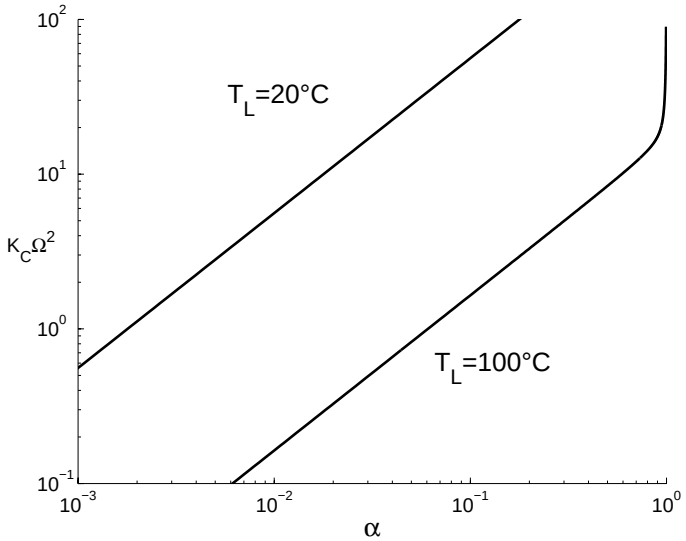


Figura 2.8: Parametro adimensionale $\mathrm{Re}\left\{K_C\,\Omega^2\right\}$ in funzione della frazione di vuoto nello strato cavitante per modalità non smorzata in acqua a $T_L = 20°C$ ($\delta_T/R = 0.3$, $\delta/P^* = 3\%$) e $T_L = 100°C$ ($\delta_T/R = 1$, $\delta/P^* = 10\%$)

e per la frazione di vuoto α una del tipo

$$\alpha = f_2(p).$$

S'è proceduto perciò graficando in ordinata $\mathcal{C}$ (direttamente proporzionale all'impedenza) e in ascissa α, mantenendo una dipendenza funzionale implicita da p. Detti δ_T lo spessore dello strato limite termico e R il raggio di una bolla media, si ponga

$$\Delta = \left(1 + \frac{\delta_T}{R}\right)^3 - 1.$$

In particolare, approssimando per l'acqua,[7] f_1 è:

$$\frac{1}{\rho_C a_C^2} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p}\left[f_L - f_L\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta + g_L\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta\right].$$

Valendo la pressione al punto critico $p_c = 2.2\ 10^7$Pa:

$$g_L = \frac{5}{3}\left(\frac{p_c}{p}\right)^{0.73} = \frac{3.83\ 10^5}{p^{0.73}}$$

ed essendo $f_L = \frac{p}{\rho_L a_L^2}$ trascurabilmente piccolo, f_1 è ulteriormente approssimata a:

$$\frac{1}{\rho_C a_C^2} \approx \frac{\alpha}{p} + \frac{\alpha\Delta}{p^{1.73}}\ 3.83\ 10^5.$$

[7] In seguito si sono usate le notazioni esposte nei riferimenti citati.

La funzione f_2 è ottenuta raccordando due tratti: il primo valido per $\alpha < \alpha_\epsilon$, il secondo per $\alpha > \alpha_\epsilon$, essendo α_ϵ il valore per cui tutto il liquido è in contatto termico colla miscela vapore/gas: $\epsilon_L = 1$. Si può determinare facilmente α_ϵ dalla relazione

$$\epsilon_L = \Delta \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Detta p_V la pressione di vapore dell'acqua alla temperatura scelta, con l'ulteriore posizione

$$h_1(p) = \frac{p}{p_V} \exp\left\{ \frac{\frac{5}{3}\Delta}{0.73} \left(\frac{p_c}{p}\right)^{0.73} \left[\left(\frac{p}{p_V}\right)^{0.73} - 1 \right] \right\},$$

la prima parte di f_2 per ottenere α è data da

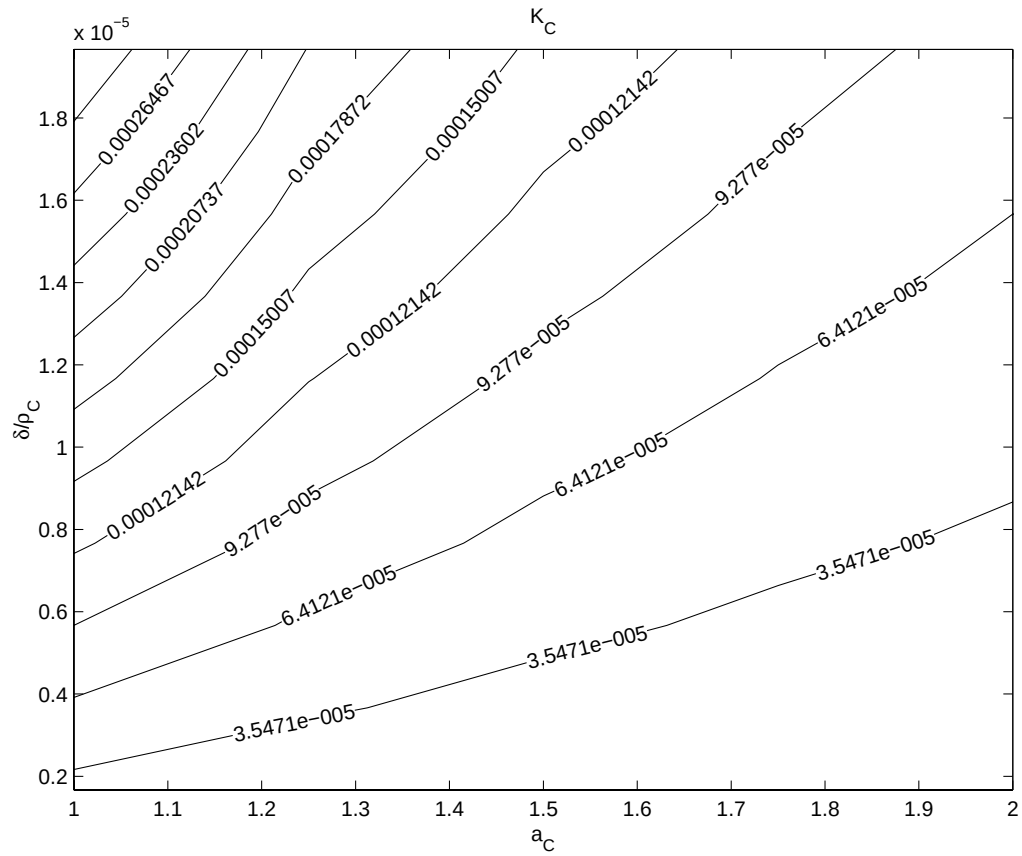
$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = -\frac{1}{\rho_L a_L^2} \frac{\int_{p_V}^{p} h_1(p)\, dp}{h_1(p)},$$

valida per $0 < \alpha < \alpha_\epsilon$ ovvero per $p_\epsilon < p < p_V$, detta p_ϵ la pressione a cui $\alpha = \alpha_\epsilon$. la seconda parte di f_2 è ottenuta da

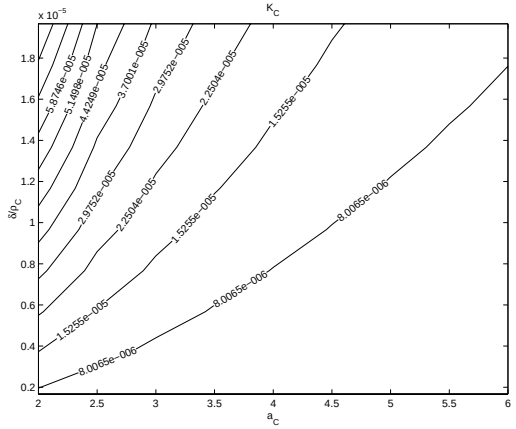
$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\frac{5}{3}}{1-0.73} \left(\frac{p_c}{p_V}\right)^{0.73} \left[\left(\frac{p}{p_V}\right)^{1-0.73} - 1 \right] \frac{p_V}{p},$$

valida per $\alpha_\epsilon < \alpha < 1$ ovvero per $p < p_\epsilon$.

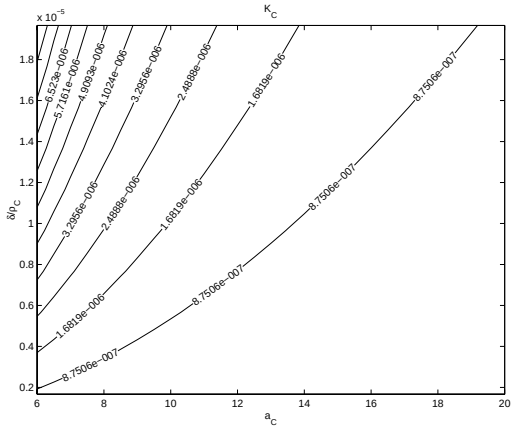
Il comportamento di $\mathcal{C}$ con la frazione di vuoto α è illustrato nella figura 2.8 per l'acqua a temperatura ambiente e a quella d'ebollizione. I risultati dipendono parametricamente dalla percentuale di bloccaggio del canale δ/P^* e dal rapporto δ_T/R tra lo spessore dello strato limite termico, circondante una cavità sferica, e il raggio della cavità stessa. Il parametro δ_T/R resta pressoché costante durante la crescita termicamente controllata delle bolle ed il suo valore può essere funzione delle condizioni del flusso, delle proprietà termo-fisiche delle due fasi e della concentrazione di nuclei attivi di cavitazione. Nel caso presentato, la scelta di una percentuale di bloccaggio δ/P^* più alta alla temperatura d'ebollizione riflette la maggior penetrazione della cavitazione nel liquido a temperature elevate. Dalla figura 2.8 si vede che il valore $Re\left\{K_C \Omega^2\right\}$ precedentemente usato per la predizione delle forze rotodinamiche corrisponderebbe a frazioni di vuoto che vanno da 4×10^{-2} a temperatura ambiente fino a 10^{-1} in condizioni di ebollizione. La separazione media tra le bolle sarebbe allora dell'ordine di due o tre diametri, valori medi non irrealistici per la cavitazione tipicamente indotta sulle pale.



(a) $1 < a_C < 2$ m/s



(b) $2 < a_C < 6$ m/s



(c) $6 < a_C < 20$ m/s

Figura 2.9: I grafici illustrano il valore assunto dalla parte reale di K_C, al variare della velocità del suono a_C (reale) e di δ/ρ_C nell'intervallo $\frac{\delta_{min}=1\ mm}{\rho_{C\,max}=600\ kg/m^3} < \frac{\delta}{\rho_C} < \frac{\delta_{max}=4\ mm}{\rho_{C\,min}=150\ kg/m^3}$

CAPITOLO 3

Integrazione delle pressioni

"Double, double toil and trouble;
Fire burn and cauldron bubble."
— *William Shakespeare,* Macbeth

Le forze agenti sul sistema vengono di seguito calcolate integrando le pressioni sulle superfici sulle quali esse agiscono.

3.1 Superfici

Una superficie può essere rappresentata parametricamente dai punti

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, \eta)$$

in cui ξ e η sono i due parametri indipendenti. Un elemento-vettore di superfice $\mathrm{d}\mathbf{S}$, pari al versore ad essa normale moltiplicata per il suo modulo $\mathrm{d}S$, è (Coxeter, 1969, pag. 343):

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \pm \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta.$$

L'ambiguità del segno è dovuta al fatto che, di volta in volta, $\mathbf{S}$ è qui orientata con la normale uscente diretta verso il fluido.

Conviene usare le coordinate elicoidali (r', n', s') descritte in §2.3.2 perché in questo riferimento i canali compresi tra le pale appaiono semplicemente rettangolari.

3.1.1 Alloggiamento

Coordinate cilindriche lagrangiane Per ricavare le rappresentazioni in coordinate elicoidali dell'alloggiamento conviene partire da una rappresentazione in coordinate cilindriche rotanti (r', θ', z') e scegliere θ' e z' quali parametri indipendenti (fig. 3.1). Perciò il vettore posizione di un punto su una generica superficie è

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta', z') = r' \boldsymbol{e}_{r'} + z' \boldsymbol{e}_{z'}$$

e l'elemento di superficie generica è

$$d\boldsymbol{S} = \pm \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta'} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial z'} \, d\theta' \, dz'. \tag{3.1}$$

L'orientamento di $\boldsymbol{e}_{r'}$ dipende solo da θ', invece $\boldsymbol{e}_{z'}$ è fisso:

$$\boldsymbol{x} = r''(\theta'', z'') \; \boldsymbol{e}_{r''}(\theta'') + z'' \; \boldsymbol{e}_{z''}; \tag{3.2}$$

perciò, sulla superficie dell'alloggiamento (eq. 2.50) la (3.2) si scrive:

$$\boldsymbol{x}_C = r_T \; \boldsymbol{e}_{r'}(\theta') + z' \boldsymbol{e}_{z'}$$

mentre la (3.1) diventa:

$$d\boldsymbol{S}_C = r_T \, \frac{\partial \boldsymbol{e}_{r'}}{\partial \theta'} \times \boldsymbol{e}_{z'} \, d\theta' \, dz'.$$

Siccome vale la relazione

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_{r'}(\theta')}{\partial \theta'} = \boldsymbol{e}_{\theta'},$$

l'elemento di superficie può esprimersi come:

$$d\boldsymbol{S}_C = \pm r_T \; \boldsymbol{e}_{\theta'} \times \boldsymbol{e}_{z'} \, d\theta' \, dz' = -r_T \; \boldsymbol{e}_{r'} \, d\theta' \, dz', \tag{3.3}$$

positivo quando rivolto verso l'esterno.

Jacobiano della trasformazione Indicato con J lo Jacobiano di una trasformazione, in genere J varia da punto a punto, perciò andrà, di volta in volta, calcolato sulla superficie di interesse. Per passare da coordinate cilindriche lagrangiane a elicoidali lagrangiane vale la relazione

$$d\theta' \, dz' = |J| \, ds' \, dn'. \tag{3.4}$$

Per come è stata definita la trasformazione delle coordinate (eq. 2.16), la trasformazione, sull'alloggiamento, riguarda solo due variabili:

$$\begin{aligned} \theta' &\approx \theta_j - 2\pi s'' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M, \\ z' &\approx s' P + n' \frac{P}{N_B} \cos^2 \beta_M, \end{aligned} \tag{3.5}$$

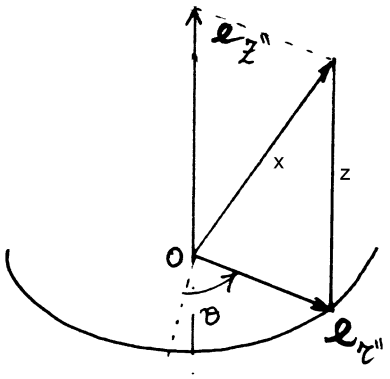


Figura 3.1: Una superficie è definita con due parametri indipendenti

perciò lo Jacobiano è dato da:

$$J_{r=r_T} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial\theta'}{\partial n'} & \frac{\partial\theta'}{\partial s'} \\ \frac{\partial z'}{\partial n'} & \frac{\partial z'}{\partial s'} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{2\pi}{N_B}\,\mathrm{sen}^2\,\beta_M & -2\pi \\ \frac{P}{N_B}\cos^2\beta_M & P \end{matrix} \right\| = \frac{2\pi}{N_B} P.$$

Pertanto, dalle eqq. 3.3 e 3.4:

$$d\theta' dz' = \frac{2\pi}{N_B} P\, dn' ds',$$
$$d\boldsymbol{S}_C = -r_T\, \boldsymbol{e}_{r'} \frac{2\pi P}{N_B} ds'\, dn'.$$

Proiezioni radiali e assiali Si proiettino le superfici dell'alloggiamento, espresse in coordinate relative, su altre superfici normali ad una base $(\boldsymbol{e}_R, \boldsymbol{e}_T, \boldsymbol{e}_{z^*})$ definita in modo che $\boldsymbol{e}_R$ punti l'asse eccentrico (fig. 3.2).

Il versore $\boldsymbol{e}_R$ identifica la posizione dell'asse eccentrico dell'induttore; $\boldsymbol{e}_T$ è ad esso normale, tale da formare con $\boldsymbol{e}_{z^*}$ una terna levogira. Ci si può riferire a queste direzioni coi termini "radiale" e "tangenziale", ma non bisogna dimenticare che questi concetti hanno un significato non immediatamente intuitivo, in quanto legati non solo alla geometria delle superfici, ma anche alla posizione eccentrica dell'induttore. Ad esempio, risulta non necessariamente nullo il prodotto scalare tra una quantità vettoriale normale alla superficie delle pale — che, pure, hanno $\gamma = 0$ — e la direzione "radiale" in quel punto.

Dalla geometria $(\theta' = \theta - \Omega t)$ segue che $\boldsymbol{e}_{r'}$ e $\boldsymbol{e}_R$ sono sfasati di un angolo

$$\vartheta_{Rr'} = \theta - \omega t = \theta' - \omega' t,$$

perciò i coseni direttori valgono

$$\boldsymbol{e}_{r'} \cdot \boldsymbol{e}_R = \cos(\theta' - \omega' t),$$
$$\boldsymbol{e}_{r'} \cdot \boldsymbol{e}_T = \cos(\theta' - \omega' t - \pi/2)$$

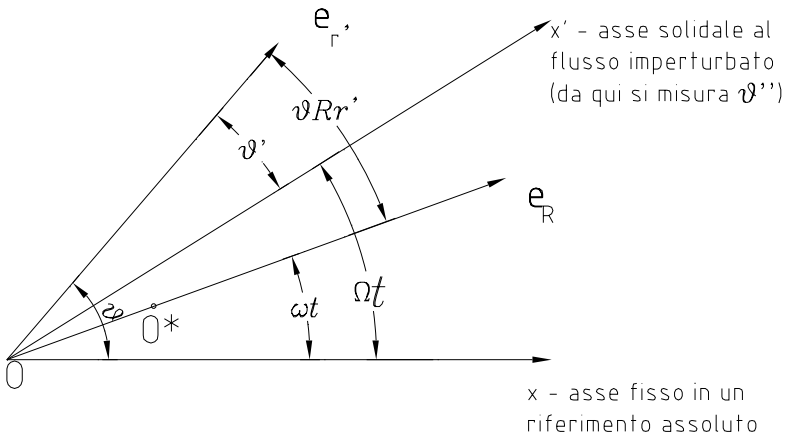


Figura 3.2: Angoli tra (R, T, z^*) e (r', θ', z')

e, per via della (3.5):

$$\boldsymbol{e}_{r'} \cdot \boldsymbol{e}_R = \cos\left(-2\pi s' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - \omega' t + \theta_j\right),$$
$$\boldsymbol{e}_{r'} \cdot \boldsymbol{e}_T = \operatorname{sen}\left(-2\pi s' + \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - \omega' t + \theta_j\right).$$

Per quanto scritto finora, le proiezioni degli elementi si superfice dell'alloggiamento $d\boldsymbol{S}_C$ lungo le direzioni "radiale" e "tangenziale" identificate dalla posizione eccentrica del mozzo sono:

$$d\boldsymbol{S}_{C,j} \cdot \boldsymbol{e}_R = dS_{C,j}\, \boldsymbol{e}_{r'} \cdot \boldsymbol{e}_R = -\frac{2\pi}{N_B} P\, r_T \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) dn' ds', \tag{3.6}$$

$$d\boldsymbol{S}_{C,j} \cdot \boldsymbol{e}_T = dS_{C,j}\, \boldsymbol{e}_{r'} \cdot \boldsymbol{e}_T = -\frac{2\pi}{N_B} P\, r_T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) dn' ds', \tag{3.7}$$

$$d\boldsymbol{S}_{C,j} \cdot \boldsymbol{e}_z = 0. \tag{3.8}$$

3.1.2 Mozzo e pale

Coordinate cilindriche rotanti Come si può capire osservando le equazioni in §2.7, per le superfici appartenenti all'induttore conviene partire da descrizioni fatte in coordinate (r^*, θ^*, z^*) (riferimento cilindrico solidale all'induttore, centrato nella posizione eccentrica, rotante — tab. 2.1). Sul mozzo un punto generico è

$$\boldsymbol{x}_H = \boldsymbol{x}_H(\theta^*, z^*) = r_H\, \boldsymbol{e}_{r^*}(\theta^*) + z^* \boldsymbol{e}_{z^*},$$

e l'elemento di superficie

$$d\boldsymbol{S}_H = \frac{\partial \boldsymbol{x}_H}{\partial \theta^*} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}_H}{\partial z^*}\, d\theta^*\, dz^* = r_H \boldsymbol{e}_{\theta^*} \times \boldsymbol{e}_{z^*}\, d\theta^*\, dz^* = r_H \boldsymbol{e}_{r^*}\, d\theta^*\, dz^*$$

risulta positivo verso l'esterno.

Per le pale, l'equazione di una generica superficie a n^* =costante è

$$\theta_{n^*} = \theta^* + \frac{2\pi}{P} z^* = \theta_j$$

e quindi:

$$\boldsymbol{x}_{B,j} = r^* \boldsymbol{e}_{r^*}(\theta^*) + z^* \boldsymbol{e}_{z^*} = r^* \boldsymbol{e}_{r^*}(\theta^*) + (\theta_j - \theta^*) \frac{P}{2\pi} \boldsymbol{e}_{z^*} = \boldsymbol{x}_{B,j}(r^*, \theta^*),$$

con la quale si è eseguita la trasformazione da una funzione apparentemente del tipo $\boldsymbol{x}_{B_j}(r^*, \theta^*, z^*)$, nella quale la dipendenza $z^* = z^*(\theta^*)$ è nascosta, in una in cui compaiono solo due parametri indipendenti (r^*, θ^*), come è giusto che sia per una superficie. Perciò:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{S}_{B_j} &= \pm \frac{\partial \boldsymbol{x}_{B_j}}{\partial r^*} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}_{B_j}}{\partial \theta^*}\, dr^*\, d\theta^* = \boldsymbol{e}_{r^*}(\theta^*) \times \left[r^* \frac{d}{d\theta^*} \boldsymbol{e}_{r^*}(\theta^*) - \frac{P}{2\pi} \boldsymbol{e}_{z^*} \right] dr^*\, d\theta^* \\ &= \pm \left(r^* \boldsymbol{e}_{z^*} + \frac{P}{2\pi} \boldsymbol{e}_{\theta^*} \right) dr^*\, d\theta^*, \quad \text{con } j = 1, \ldots, N_B; \end{aligned}$$

il segno $\pm$ è riferito, rispettivamente, ai lati in pressione/aspirazione delle pale.

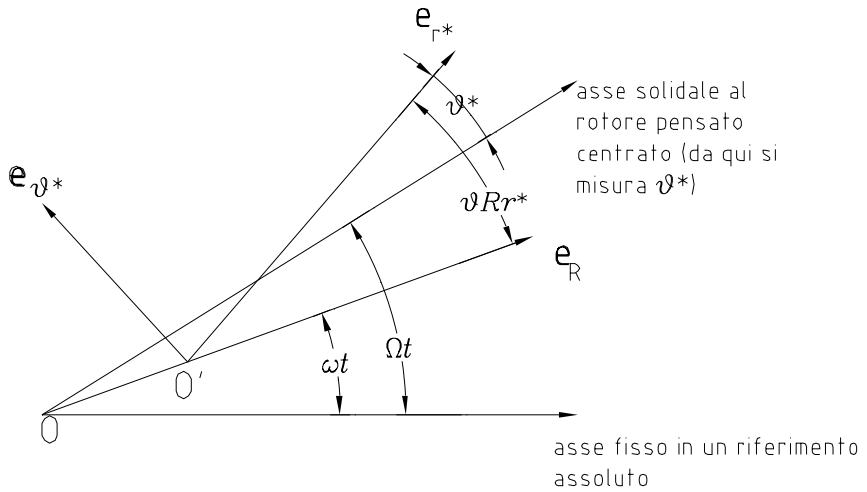


Figura 3.3: Angoli tra (R, T, z^*) e (r^*, θ^*, z^*)

Proiezioni radiali, tangenziali e assiali delle forze Analogamente a quanto fatto per l'alloggiamento, si proiettino le superfici del mozzo e delle pale, espresse

incoordinate cilindriche rotanti, su altre superfici normali alla base ($\boldsymbol{e}_R$, $\boldsymbol{e}_T$, $\boldsymbol{e}_{z^*}$) (fig. 3.3). Dalla geometria si deduce:

$$\vartheta_{Rr^*} = \Omega t + \theta^* - \omega t = \theta^* + (\Omega - \omega)t.$$

I coseni direttori sono determinati dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{r^*} \cdot \boldsymbol{e}_R &= \cos \vartheta_{Rr^*}, \\
\boldsymbol{e}_{\theta^*} \cdot \boldsymbol{e}_R &= \cos(\vartheta_{Rr^*} + \pi/2) = -\operatorname{sen} \vartheta_{Rr^*}, \\
\boldsymbol{e}_{r^*} \cdot \boldsymbol{e}_T &= \cos(\vartheta_{Rr^*} - \pi/2) = \operatorname{sen} \vartheta_{Rr^*}, \\
\boldsymbol{e}_{\theta^*} \cdot \boldsymbol{e}_T &= \cos \vartheta_{Rr^*}.
\end{aligned}$$

Jacobiano della trasformazione $(r^*, s^*, n^*) \rightarrow (r^*, \theta^*, z^*)$**:** la trasformazione di coordinate cui far riferimento è la (2.17). Scelta una superficie (mozzo o pale), questa trasformazione riguarda solo due variabili.

Sul mozzo $r^* = r_H$ e, analogamente a quanto fatto per l'alloggiamento (pag. 55), le variabili indipendenti da trasformare sono θ^* e z^*:

$$J_{r^*=r_H} = \frac{2\pi}{N_B} P,$$

cosicché

$$d\theta^*\ dz^* = \frac{2\pi}{N_B} P\ ds^*\ dn^*$$

e

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{S}_H \cdot \boldsymbol{e}_R &= dS_H\ \boldsymbol{e}_{r^*} \cdot \boldsymbol{e}_R = r_H \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n^* \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s^* + \theta_j - \omega' t\right) \frac{2\pi}{N_B} P\ dn^* ds^*, \\
d\boldsymbol{S}_H \cdot \boldsymbol{e}_T &= dS_H\ \boldsymbol{e}_{r^*} \cdot \boldsymbol{e}_T = r_H \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n^* \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s^* + \theta_j - \omega' t\right) \frac{2\pi}{N_B} P\ dn^* ds^*.
\end{aligned}$$

Sulle pale, per quanto già visto, le due variabili indipendenti da trasformare sono r^* e θ^*. Le coordinate si trasformano con:

$$\begin{aligned}
r^*|_{cil} &= r^*|_{elic}\,, \\
\theta^* &= \frac{2\pi}{N_B} n^* \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s^* + \theta_j,
\end{aligned}$$

perciò lo jacobiano vale

$$J_{pala} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial r^*}{\partial r^*} & \frac{\partial r^*}{\partial s^*} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} & \frac{\partial \theta^*}{\partial s^*} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{2\pi}{N_B} n^* \frac{d}{dr^*} \operatorname{sen}^2 \beta & -2\pi \end{matrix} \right\| = -2\pi < 0$$

e quindi

$$dr^*\ d\theta^* = 2\pi\ dr^*\ ds^*$$

e le proiezioni valgono:

$$dS_{B,j,n^*} \cdot e_R = \mp P \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n^* \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s^* + \theta_j - \omega' t\right) dr^* ds^*,$$
$$dS_{B,j,n^*} \cdot e_T = \pm P \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n^* \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s^* + \theta_j - \omega' t\right) dr^* ds^*,$$
$$dS_{B,j,n^*} \cdot e_z = \pm 2\pi r^* dr^* ds^*.$$

Trasformazione $(r', s', n') \rightarrow (r^*, s^*, n^*)$**:** le superfici del mozzo e delle pale vanno trasformate, anch'esse, in coordinate elicoidali lagrangiane.

Dalle relazioni (2.17), (2.10), (2.16):

$$\begin{aligned} r^* &= r' - \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right), \\ n^* &= n' + \frac{\varepsilon N_B}{2\pi r'} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right), \\ s^* &= s' - \frac{\varepsilon \cos^2 \beta}{2\pi r'} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Alcuni termini di queste espressioni dipendono linearmente da ε. Si decide qui, per semplicità di calcolo, di *trascurare del tutto — ai fini della proiezione delle superfici — l'eccentricità,* la quale pertanto entra nel problema solo come fattore che introduce le perturbazioni di pressione. Ponendo $\varepsilon = 0$ si ha:

$$\begin{cases} r^* \approx r' \\ s^* \approx s' \\ n^* \approx n' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dr^* \approx dr' \\ ds^* \approx ds' \\ dn^* \approx dn' \end{cases}$$

per mezzo delle quali le nuove espressioni per gli elementi di superficie del mozzo sono:

$$dS_{H,j} \cdot e_R = r_H \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) \frac{2\pi}{N_B} P \, dn' ds',$$
$$dS_{H,j} \cdot e_T = r_H \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) \frac{2\pi}{N_B} P \, dn' ds',$$
$$dS_{H,j} \cdot e_z = 0.$$

Per le due pale corrispondenti a $n' = 0, 1$ dello j−mo canale:

$$dS_{B,j,n'} \cdot e_R = \mp P \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) dr' ds',$$
$$dS_{B,j,n'} \cdot e_T = \pm P \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right) dr' ds',$$
$$dS_{B,j,n'} \cdot e_z = \pm 2\pi r' dr' ds'.$$

3.2 Integrazione delle pressioni

Le forze dovute alla parte perturbativa della pressione sono calcolate sull'induttore nella sua posizione effettiva (eccentrica) $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x}^*)$, la cui espressione è ottenuta invertendo le precedenti relazioni (3.9).

La valutazione di queste pressioni avviene approssimando al primo ordine di una serie di Taylor attorno alla posizione effettiva (perturbata); questo permette di integrare le pressioni nella posizione imperturbata ($\varepsilon = 0$):

$$p \approx \overline{p}|_{\varepsilon=0} + \left.\frac{\partial \overline{p}}{\partial r'}\right|_{\varepsilon=0} (r' - r'|_{\varepsilon=0}) + \tilde{p}|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2),$$

in cui r' è esprimibile invertendo la prima delle (3.9); mentre il gradiente radiale di pressione del flusso imperturbato vale, in accordo con la (2.8):

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial r'} = \rho_L \Omega^2 r'(1 - \phi^2 \cot^2 \beta_T).$$

Perciò

$$p \approx (\overline{p} + \tilde{p})|_{\varepsilon=0} + \rho_L \Omega^2 r'(1 - \phi^2 \cot^2 \beta_T)\big|_{\varepsilon=0} \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t\right)$$

in cui

$$\tilde{p}|_{\varepsilon=0} = -\rho_L \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} - \rho_L \overline{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \tilde{\varphi}$$

e

$$\tilde{\varphi} = \mathrm{Re}\{\hat{\varphi}_H + \hat{\varphi}_B\},$$

con

$$\hat{\varphi}_H = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} R_{km}(r') N_k(n') S_m(s') e^{-\imath \omega' t},$$
$$\hat{\varphi}_B = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} R_{lm}(r') N_{lm}(n') S_m(s') e^{-\imath \omega' t}.$$

Perciò la forza esercitata sull'induttore (I) dal fluido contenudo nello $j-$mo canale ($r_H \le r' \le r_T, 0 \le n' \le 1, s'_1 \le s' \le s'_2$) è:

$$\mathbf{F}^{(I,j)} = -\int_{S_{I,j}} p \, d\mathbf{S} \quad \text{per } j = 1, 2, \ldots, N_B,$$

dove la superficie $S_{I,j}$ è calcolata nella posizione imperturbata e comprende la superficie del mozzo $S_{H,j}$ ($r' = r_H; 0 \le n' \le 1; s'_1 \le s' \le s'_1 + N_R$) e quelle contrapposte delle due pale $S_{B,j,0}, S_{B,j,1}$ ($r_H \le r' \le r_T; n' = 0, 1; s'_1 \le s' \le s'_1 + N_R$). Dunque

$$\mathbf{F}^{(I,j)} = -\int_{S_{H,j}} p \, d\mathbf{S} - \int_{S_{B,j,0}} p \, d\mathbf{S} - \int_{S_{B,j,1}} p \, d\mathbf{S},$$

e la forza complessiva, sommando su tutte le pale, ammonta a

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{I})} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{N_B}} \mathbf{F}^{(\mathrm{I,j})}.$$

CAPITOLO 4

Calcolo delle forze

"The earth hath bubbles, as the water has,
And these are of them. Whither are they vanish'd?"
— *William Shakespeare,* Macbeth

Di seguito, verrà illustrata la procedura per la scomposizione passo-passo del calcolo delle forze. Successivamente, nel programma di calcolo, le forze verranno adimensionalizzate dividendole per $\pi \rho_L \Omega^2 \varepsilon L r_T^2$ (dato il passo assiale $P = 2\pi r_T \tan \beta_T$, la lunghezza $L = N_R P$ di ciascuna pala coincide con la lunghezza di tutto l'induttore). L'adimensionalizzazione coincide con quella usata da Bhattacharyya (1994).

Il modello di induttore VII ivi descritto ha $N_R = 0.485$.

C'è una piccola differenza nella definizione del coefficiente di flusso ϕ. Indicato con ϕ_B quello di Bhattacharyya, si ha:

$$\frac{\phi_B}{\phi} = 1 - \left(\frac{r_H}{r_T}\right)^2$$

che, per la geometria dell'induttore VII, vale 0.84.

4.1 N_R modificato

Oltre al numero di rivoluzioni di una pala intorno all'asse (N_R) come finora definito, si può considerare il numero n_R modificato in modo tale da tener conto solo della parte di ciascun canale completamente coperta da due pale che s'affacciano l'un

sull'altra. Questo è un valore sensibilmente più piccolo. Alla fine, il valore "efficace" usato N_R^* risulterà compreso tra n_R e N_R.

Si usino i simboli seguenti:

- L la lungheza assiale dell'induttore;
- L^* la lunghezza delle pale in direzione $\boldsymbol{e}_s$;
- P il passo assiale dell'induttore, ovvero la distanza, misurata in direzione assiale, tra un punto della pala ed il successivo, in fase, della stessa pala;
- P^* la larghezza di un canale, ovvero la distanza, misurata lungo $\boldsymbol{e}_n$, tra una pala e la successiva ad essa contingua;
- ℓ^* la lunghezza completamente coperta di un canale, misurata lungo $\boldsymbol{e}_s$;
- ℓ la lunghezza, proiettata lungo l'asse, della parte completamente coperta di un canale;
- $2c$ la lunghezza scoperta di ciascun canale, misurata lungo $\boldsymbol{e}_s$.

Risultano:

- $N_R = L/P$;
- $P = 2\pi r \tan\beta$;
- $P^* = \frac{P\cos\beta}{N_B} = \frac{2\pi r}{N_B}\operatorname{sen}\beta$;
- $c = \frac{1}{2}\frac{P^*}{\tan\beta}$;
- $\ell^* = L^* - 2c$;
- $L = L^*\operatorname{sen}\beta$;
- $\ell = \ell^*\operatorname{sen}\beta$.

Definendo

$$n_R = \frac{\ell}{P}$$

si può scrivere

$$\begin{aligned}\frac{n_R}{N_R} = \frac{\ell}{L} = \frac{\ell^*}{L^*} &= \frac{L^* - P^*/\tan\beta}{L^*} \\ &= 1 - \frac{P^*}{L^*}\cot\beta \\ &= 1 - \frac{\frac{2\pi r}{N_B}\operatorname{sen}\beta}{L^*}\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} \\ &= 1 - \frac{2\pi r}{N_B}\cos\beta \\ &= 1 - \frac{2\pi r}{N_B\, L}\operatorname{sen}\beta\cos\beta\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} n_R &= N_R - \frac{2\pi r}{N_B}\frac{N_R}{L}\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta \\ &= N_R - \frac{2\pi r}{N_B}\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta P \\ &= N_R - \frac{2\pi r\,\mathrm{sen}\,\beta\cos^2\beta}{2\pi r\,N_B\,\mathrm{sen}\,\beta} \\ &= N_R - \frac{\cos^2\beta}{N_B}. \end{aligned}$$

Questo vuol dire che, detta ΔN_R la differenza tra il numero di rivoluzioni modificato per tener conto solo del canale completamente coperto e quello effettivo, si ha:

$$\Delta N_R = n_R - N_R = -\frac{\cos^2\beta}{N_B}.$$

Con la geometria dell'induttore VII:

$$\Delta N_R = -0.325 \quad \Rightarrow \quad n_R = 0.16.$$

4.2 Ω modificato

Per tener conto del fatto che l'induttore reale non può — come invece è schematizzato nel presente modello — imporre impulsivamente una velocità angolare Ω a tutto il flusso, nel programma vengono adottati due valori diversi:

- una velocità angolare "fluidodinamica" o "efficace" Ω^* ridotta,
- una v.a. nominale Ω di riferimento.

Il valore fluidodinamico trova posto nella formula (4.2) pel calcolo della componente dovuta al flusso medio. Il valore nominale si usa per tutti gli altri calcoli, inclusi quelli principali delle forze perturbative.

4.3 Forze dovute al flusso medio

Il legame tra $\overline{p}_H$ (pressione del flusso medio calcolata sul mozzo) e le condizioni in ingresso viene calcolato imponendo che sia

$$\int_A (p_1 + \rho_L u_1{}^2)\,dA = \int_A (\overline{p} + \rho_L u^2)\,dA$$

ovvero

$$\int_A p_1\,dA = \int_A \overline{p}\,dA, \tag{4.1}$$

dove A è l'area della corona circolare delimitata da r_H e r_T. Tramite l'equazione di equilibrio radiale

$$\frac{d\overline{p}}{dr} = \rho_L \Omega^2 r (1 - \phi^2 \cot^2 \beta_T) \tag{2.8}$$

si identifica una costante K_P

$$\overline{p}(r) = \rho_L \Omega^2 r^2 (1 - \phi^2 \cot^2 \beta_T) + K_P,$$

determinata la quale, in accordo con la (4.1):

$$\overline{p}_H = p_1 + \frac{1}{2}(1 - \phi^2 \cot^2 \beta_T)\, \rho_L \Omega^2 (r_H^2 - r_T^2).$$

4.3.1 Forze agenti sul mozzo

La forza agente sul mozzo dovuta alla pressione $\overline{p}$ del flusso medio nello $j-$mo canale è:

$$\begin{aligned} F_{\overline{p}}^{(H,j)} &= -\int_{S_{H,j}} \left(\overline{p} + \frac{d\overline{p}}{dr'} \varepsilon \cos x \right)\Bigg|_{\varepsilon=0} (\boldsymbol{e}_R\, \boldsymbol{e}_R + \boldsymbol{e}_T\, \boldsymbol{e}_T + \boldsymbol{e}_z\, \boldsymbol{e}_z) \cdot d\boldsymbol{S}_{H,j} = \\ &= -\varepsilon \overline{p}_H r_H \frac{2\pi}{N_B} P \int_0^1 \left[\int_{s_1'}^{s_2'} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_R \cos x \\ \boldsymbol{e}_T \operatorname{sen} x \end{pmatrix} ds' \right] dn' \\ &\quad - \varepsilon \rho_L \Omega^2 r_H^2 \left(1 - \phi^2 \cot^2 \beta_T\right) \frac{2\pi}{N_B} P \\ &\quad \times \int_0^1 \left[\int_{s_1'}^{s_2'} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_R \cos^2 x \\ \boldsymbol{e}_T \operatorname{sen} x \cos x \end{pmatrix} ds' \right] dn' = \begin{pmatrix} f_{\overline{p}R}^{(H,j)} \\ f_{\overline{p}T}^{(H,j)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La forza che agisce sul mozzo a causa del flusso medio in tutti i canali è:

$$F_{\overline{p}}^{(H)} = \sum_{j=1}^{N_B} F_{\overline{p}}^{(H,j)}.$$

Componente radiale

La componente radiale si calcola tramite la relazione:

$$f_{\overline{p}R}^{(H)} = \sum_{j=1}^{N_B} f_{\overline{p}R}^{(H,j)}.$$

Fatte le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} x_1|_{n'=0} &= x_{10} = -2\pi s_1' + \theta_j - \omega' t, \\ x_1|_{n'=1} &= x_{11} = \frac{2\pi}{N_B} \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s_1' + \theta_j - \omega' t, \\ x_2|_{n'=0} &= x_{20} = -2\pi s_2' + \theta_j - \omega' t, \\ x_2|_{n'=1} &= x_{21} = \frac{2\pi}{N_B} \operatorname{sen}^2 \beta_M - 2\pi s_2' + \theta_j - \omega' t, \end{aligned}$$

e sviluppati i calcoli, la componente radiale vale:

$$f_{\overline{p}R}^{(H,j)} = -\frac{P\,\varepsilon\overline{p}_H r_H}{2\pi\,\mathrm{sen}^2\,\beta_M}\left(\cos x_{21} - \cos x_{20} - \cos x_{11} + \cos x_{10}\right) \overbrace{-\left(1-\phi^2\cot^2\beta_T\right)\frac{\Omega^2\,r_H^2\,\varepsilon\rho_L\,P}{16\pi\,\mathrm{sen}^2\,\beta_M}}^{\mathfrak{X}}$$
$$\times\left[-2x_{10}{}^2 + 2x_{11}{}^2 + 2x_{20}{}^2 - 2x_{21}{}^2 + \cos(2x_{10}) - \cos(2x_{11}) - \cos(2x_{20}) + \cos(2x_{21})\right].$$

Il primo addendo risulta nullo se $(s_2' - s_1') = N_R$ è un numero intero. Per calcolare la media temporale nel periodo, si facciano le uleriori posizioni:

$$\begin{aligned} x_{10} &= y_{10} - \omega' t, \\ x_{11} &= y_{11} - \omega' t, \\ x_{20} &= y_{20} - \omega' t, \\ x_{21} &= y_{21} - \omega' t, \end{aligned}$$

con le quali il primo addendo sparisce ed è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \sum_j \underline{f}_{\overline{p}R}^{(H,j)} &= \sum_j -\mathfrak{X}\left\{2\left[-y_{10}{}^2 + y_{11}{}^2 + y_{20}{}^2 - y_{21}{}^2 + 2\pi\left(y_{10} - y_{11} - y_{20} + y_{21}\right)\right]\right\} \\ &= -2\sum_{j=1}^{N_B}\mathfrak{X}(-y_{10}{}^2 + y_{11}{}^2 + y_{20}{}^2 - y_{21}{}^2) \\ &= -16\mathfrak{X}\,\pi^2\,N_R\,\mathrm{sen}^2\,\beta_M \\ &= -\left(1-\phi^2\cot^2\beta_T\right)\Omega^2 r_H^2\,\varepsilon\rho_L P\pi N_R, \end{aligned} \tag{4.2}$$

che è una forza di valore sempre negativo.

Osservazione 1. $\overline{p}_H$ *non ha nessuna influenza nel risultato finale (mediato nel tempo).*

Componente tangenziale

$$f_{\overline{p}T}^{(H,j)} = -\frac{P\,\varepsilon\overline{p}_H r_H}{2\pi\,\mathrm{sen}^2\,\beta_M}\left(\mathrm{sen}\,x_{21} - \mathrm{sen}\,x_{20} - \mathrm{sen}\,x_{11} + \mathrm{sen}\,x_{10}\right) \overbrace{-\left(1-\phi^2\cot^2\beta_T\right)\frac{\Omega^2\,r_H^2\,\varepsilon\rho_L\,P}{16\pi\,\mathrm{sen}^2\,\beta_M}}^{\mathfrak{X}}$$
$$\times\left[-2x_{10} + 2x_{11} + 2x_{20} - 2x_{21} + \mathrm{sen}(2x_{10}) - \mathrm{sen}(2x_{11}) - \mathrm{sen}(2x_{20}) + \mathrm{sen}(2x_{21})\right].$$

Integrando nel tempo per ottenere la media nel periodo, si scopre che

$$\sum_j \underline{f}_{\overline{p}R}^{(H,j)} = \sum_j -\mathfrak{X}\left\{2\left[-y_{10} + y_{11} + y_{20} - y_{21}\right]\right\} = 0.$$

4.4 Eccitazione introdotta dal mozzo

4.4.1 Forze agenti sul mozzo

La forza totale dovuta all'eccitazione del mozzo, agente sul mozzo stesso, è:

$$F^{(HH)} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{N_B} \hat{F}^{(HH,j)}\right\},$$

dove $\hat{F}^{(HH,j)}$ è la parte agente sullo $j-$mo canale, a sua volta sommaa di molte armoniche:

$$\hat{F}^{(HH,j)} = \sum_{k}^{\infty}\sum_{m}^{\infty} \hat{F}^{(HH,j)}_{km}$$

con

$$\hat{F}^{(HH,j)}_{km} = -\imath\,\omega' \rho_L r_H P \frac{2\pi}{N_B} R_{km}(r_H)\, e^{-\imath\omega' t} \int_0^1 \left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m(s') \begin{pmatrix} e_R \cos\chi \\ e_T \operatorname{sen}\chi \end{pmatrix} ds'\right] N_k(n')\, dn'$$
$$- \frac{\Omega_F'}{N_B}\, \rho_L r_H P\, R_{km}(r_H)\, e^{-\imath\,\omega' t} \int_0^1 \left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m'(s') \begin{pmatrix} e_R \cos\chi \\ e_T \operatorname{sen}\chi \end{pmatrix} ds'\right] N_K(n')\, dn',$$

dove s'è posto $\chi = \frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}^2\beta_M n' - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t$. Al risultato s'è arrivati notando che la seconda componente di pressione può scriversi in questo caso:

$$-\rho_L \overline{u}' \cdot \nabla\tilde{\varphi} = -\rho_L \overline{u}_{s'}' \tilde{u}_{s'} = -\rho_L \frac{-\Omega_F' r'}{\cos\beta_M} \frac{\cos\beta_M}{2\pi r'} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s'} = \rho_L \frac{\Omega_F'}{2\pi} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s'},$$

grazie ai risultati contenuti nelle (2.61).

Considerando singolarmente le componenti "radiale" e "tangenziale", si scriverà:

$$\hat{F}^{(HH,j)}_{km} = \begin{pmatrix} \hat{f}^{(HH,j)}_{R,km} \\ \hat{f}^{(HH,j)}_{T,km} \end{pmatrix}.$$

Componente radiale

Si calcoli innanzitutto la media temporale:

$$\underline{\hat{f}}^{(HH,j)}_{R,km} = -\imath\omega' \rho_L r_H P \frac{2\pi}{N_B} R_{km}(r_H) \int_0^1 \left\{\int_{s_1'}^{s_2'} S_m(s') \left[\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\imath\omega' t}\cos\chi\, dt\right] ds'\right\} N_k(n')\, dn'$$
$$- \frac{\Omega_F'}{N_B}\, \rho_L r_H P\, R_{km}(r_H) \int_0^1 \left\{\int_{s_1'}^{s_2'} S_m'(s') \left[\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\imath\omega' t}\cos\chi\, dt\right] ds'\right\} N_k(n')\, dn'.$$

Per via della (B.1), e fatta la posizione:

$$\alpha = \frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}^2\beta_M n' - 2\pi s' + \theta_j = \chi - (-\imath\omega'),$$

si scrive:

$$\hat{\underline{f}}^{(HH,j)}_{R,km} = -\iota\omega'\rho_L r_H P\frac{2\pi}{N_B}R_{km}(r_H)\int_0^1 \overbrace{\left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m(s')\frac{e^{-\iota\mathfrak{a}}}{2}ds'\right]}^{(B.3)} N_k(n')\,dn' - \frac{\Omega_F'}{N_B}\rho_L r_H P\,R_{km}(r_H)\int_0^1 \underbrace{\left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m'(s')\frac{e^{-\iota\mathfrak{a}}}{2}ds'\right]}_{(B.4)\times\frac{m\pi}{N_R}} N_k(n')\,dn'.$$

Per via delle (B.3) e (B.4), e fatta la posizione:

$$\mathfrak{b} = \frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}^2\beta_M n' + \theta_j = \mathfrak{a} - (-2\pi s'),$$

si scrive:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{f}}^{(HH,j)}_{R,km} &= -\iota\,\omega'\rho_L r_H P\frac{N_R}{N_B}R_{km}(r_H)\frac{e^{2\iota\pi s_1'}}{(m-2N_R)(m+2N_R)}\\ &\times\left\{m + e^{2\iota N_R\pi}\left[-m\,\cosh(\mathrm{i}\,m\pi) + 2N_R\sinh(\mathrm{i}\,m\pi)\right]\right\}\int_0^1 e^{-\iota\,\mathfrak{b}}\,N_k(n')\,dn'\\ &- \frac{\Omega_F'}{2N_B}\rho_L r_H P\,R_{km}(r_H)m\frac{e^{2\iota\pi s_1'}}{(m-2N_R)(m+2N_R)}\\ &\times\left\{-2\iota N_R + \iota\,e^{2\iota N_R\pi}\left[-m\,\sinh(\iota\,m\pi) + 2N_R\cosh(\iota\,m\pi)\right]\right\}\int_0^1 e^{-\iota\,\mathfrak{b}}\,N_k(n')\,dn'.\end{aligned}$$

Ricordando che

$$N_k(n') = \cos\left(\sqrt{-\nu_k^2}\,n'\right) = \cosh\left(\iota\sqrt{-\nu_k^2}\,n'\right),$$

la posizione (B.9) permette di scrivere

$$\mathfrak{b} = c\,n' + \theta_j,$$

e sfruttando la (B.5) e le posizioni (B.10), (B.11) e (B.12), si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{f}}^{(HH,j)}_{R,km} &= -\,\iota\,\omega'\rho_L r_H P\frac{N_R}{N_B}R_{km}(r_H)\,e^{2\iota\pi s_1'-\iota\theta_j}\mathcal{P}_{1_m}\mathcal{F}_k\\ &- \frac{\Omega_F'}{2N_B}\rho_L r_H P\,R_{km}(r_H)m\,e^{2\iota\pi s_1'-\iota\theta_j}\mathcal{P}_{2_m}\mathcal{F}_k.\end{aligned}$$

Componente tangenziale

Rispetto alla componente radiale, l'unico cambiamento consiste in $\operatorname{sen}\mathfrak{x}$ in luogo di $\cos\mathfrak{x}$. Pertanto, e per via della (B.2), risulta:

$$\boxed{\hat{\underline{f}}^{(HH,j)}_{T,km} = \iota\,\hat{\underline{f}}^{(HH,j)}_{R,km}\ .}$$

4.4.2 Forze agenti sulle pale

La forza totale dovuta all'eccitazione del mozzo agente sulle pale è:

$$F^{(HB)} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{N_B}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{F}_{km}^{(HB,j)}\right\},$$

con

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{km}^{(HB,j)} = &-\imath\,\omega'\,\rho_L e^{-\imath\,\omega' t} N_k(0)\int_{r_H}^{r_T}\left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m(s')\begin{pmatrix}-e_R P\,\mathrm{sen}\,x_0\\ +e_T P\cos x_0\\ +e_z 2\pi r'\end{pmatrix} ds'\right] R_{km}(r')\,dr'\\
&-\frac{\Omega_F'}{2\pi}\,\rho_L e^{-\imath\,\omega' t} N_k(0)\int_{r_H}^{r_T}\left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m'(s')\begin{pmatrix}-e_R P\,\mathrm{sen}\,x_0\\ +e_T P\cos x_0\\ +e_z 2\pi r'\end{pmatrix} ds'\right] R_{km}(r')\,dr'\\
&+\imath\,\omega'\,\rho_L e^{-\imath\,\omega' t} N_k(1)\int_{r_H}^{r_T}\left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m(s')\begin{pmatrix}-e_R P\,\mathrm{sen}\,x_1\\ +e_T P\cos x_1\\ +e_z 2\pi r'\end{pmatrix} ds'\right] R_{km}(r')\,dr'\\
&+\frac{\Omega_F'}{2\pi}\,\rho_L e^{-\imath\,\omega' t} N_k(1)\int_{r_H}^{r_T}\left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m'(s')\begin{pmatrix}-e_R P\,\mathrm{sen}\,x_1\\ +e_T P\cos x_1\\ +e_z 2\pi r'\end{pmatrix} ds'\right] R_{km}(r')\,dr'
\end{aligned}$$

e le posizioni

$$\begin{aligned}
x_0 &= -2\pi s' + \theta_j - \omega' t,\\
x_1 &= \frac{2\pi}{N_B}\,\mathrm{sen}^2\,\beta_M - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t.
\end{aligned}$$

Componente radiale

Effettuando una media nel periodo usando la (B.2) e ponendo

$$y_i = x_i + \omega' t, \quad i = 0, 1,$$

si ottiene l'espressione:

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{f}}_{R,km}^{(HB,j)} = &-\omega'\rho_L N_k(0) P\int_{r_H}^{r_T}\left[\int_{s_1'}^{s_2'}\mathrm{sen}\,\frac{m\pi(s'-s_1')}{N_R}\frac{1}{2}e^{-\imath\,y_0}\,ds'\right] R_{km}(r')\,dr'\\
&+\imath\,\frac{\Omega_F'}{2}\rho_L N_k(0) P\frac{m}{N_R}\int_{r_H}^{r_T}\left[\int_{s_1'}^{s_2'}\cos\,\frac{m\pi(s'-s_1')}{N_R}\frac{1}{2}e^{-\imath\,y_0}\,ds'\right] R_{km}(r')\,dr'\\
&+\omega'\rho_L N_k(1) P\int_{r_H}^{r_T}\left[\int_{s_1'}^{s_2'}\mathrm{sen}\,\frac{m\pi(s'-s_1')}{N_R}\frac{1}{2}e^{-\imath\,y_1}\,ds'\right] R_{km}(r')\,dr'\\
&-\imath\,\frac{\Omega_F'}{2}\rho_L N_k(1) P\frac{m}{N_R}\int_{r_H}^{r_T}\left[\int_{s_1'}^{s_2'}\cos\,\frac{m\pi(s'-s_1')}{N_R}\frac{1}{2}e^{-\imath\,y_1}\,ds'\right] R_{km}(r')\,dr'.
\end{aligned}$$

Ponendo

$$z_i = y_i + 2\pi s', \quad i = 0, 1,$$

sfruttando i risultati (B.3) e (B.4) e le posizioni (B.17), (B.19), (B.10) e (B.11), si ottiene

$$\begin{aligned}\hat{\underline{f}}^{(HB,j)}_{R,km} = &- \omega' \rho_L N_k(0)\, P\, e^{2\imath\pi s'_1 - \imath\theta_j} \frac{N_R}{2\pi} \mathcal{P}_{1m} \mathcal{I}_{R_{km}} \mathcal{I}_{km} \\ &+ \imath \frac{\Omega'_F}{4\pi} \rho_L N_k(0)\, P\, m\, e^{2\imath\pi s'_1 - \imath\theta_j} \mathcal{P}_{2m} \mathcal{I}_{R_{km}} \mathcal{I}_{km} \\ &+ \omega' \rho_L N_k(1)\, P\, e^{-\imath(\theta_j + c - 2\pi s'_1)} \frac{N_R}{2\pi} \mathcal{P}_{1m} \mathcal{I}_{R_{km}} \mathcal{I}_{km} \\ &- \imath \frac{\Omega'_F}{4\pi} \rho_L N_k(1)\, P\, m\, e^{-\imath(\theta_j + c - 2\pi s'_1)} \mathcal{P}_{2m} \mathcal{I}_{R_{km}} \mathcal{I}_{km},\end{aligned}$$

in cui

$$\begin{aligned}N_k(0) &= 1, \\ N_k(1) &= \cos\sqrt{-\nu_k^2}.\end{aligned}$$

Componente tangenziale

Rispetto alla componente radiale, l'unico cambiamento consiste in $-\cos\chi_i$ in luogo di $\operatorname{sen}\chi_i$. Pertanto, e per via della (B.1), risulta:

$$\boxed{\hat{\underline{f}}^{(HB,j)}_{T,km} = \imath \hat{\underline{f}}^{(HB,j)}_{R,km}\,.}$$

4.5 Eccitazione introdotta dalle pale

4.5.1 Forze agenti sul mozzo

La forza totale dovuta all'eccitazione delle pale agente sul mozzo è:

$$F^{(BH)} = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{j=1}^{N_B} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{F}^{(BH,j)}_{lm} \right\},$$

con

$$\begin{aligned}\hat{F}^{(BH,j)}_{lm} = &- \imath\, \omega' \rho_L r_H P \frac{2\pi}{N_B} R_{lm}(r_H)\, e^{-\imath\omega' t} \int_0^1 \left[\int_{s'_1}^{s'_2} S_m(s') \begin{pmatrix} e_R \cos\chi \\ e_T \operatorname{sen}\chi \end{pmatrix} ds' \right] N_{lm}\, d\eta' \\ &- \frac{\Omega'_F}{N_B} \rho_L r_H P\, R_{lm}(r_H)\, e^{-\imath\omega' t} \int_0^1 \left[\int_{s'_1}^{s'_2} S'_m(s') \begin{pmatrix} e_R \cos\chi \\ e_T \operatorname{sen}\chi \end{pmatrix} ds' \right] N_{lm}\, d\eta'.\end{aligned}$$

Il calcolo può procedere similmente a quanto svolto in §4.4.1, per via della struttura identica dell'espressione (uniche differenze: N_{lm} e R_{lm} anziché N_k e R_{km}).

Componente radiale

Usando le definizioni (B.10) e (B.11):

$$\hat{\underline{f}}^{(BH,j)}_{R,lm} = -\imath\,\omega' \rho_L r_H P \frac{N_R}{N_B} R_{lm}(r_H)\, e^{2\imath\pi s'_1 - \imath\theta_j} \mathcal{P}_{1_m} \int_0^1 e^{-\imath\zeta n'} N_{lm}(n')\, dn' - \frac{\Omega'_F}{2N_B} \rho_L r_H P\, R_{lm}(r_H) m\, e^{2\imath\pi s'_1 - \imath\theta_j} \mathcal{P}_{2_m} \int_0^1 e^{-\imath\zeta n'} N_{lm}(n')\, dn'.$$

Essendo

$$N_{lm}(n') = \frac{\mathcal{I}_1 \cosh(\nu_{lm} n') - \mathcal{I}_0 K_C \omega'^2 \operatorname{senh}(\nu_{lm} n') - \mathcal{I}_0 \nu_{lm} \cosh[\nu_{lm}(n'-1)]}{\nu_{lm} \operatorname{senh} \nu_{lm} - K_C \omega'^2 \cosh \nu_{lm}},$$

gli integrali in n' vengono spezzati e calcolati come somma di tre addendi (il denominatore può essere portato fuori dal segno di integrale):

$$\mathcal{I}_{n_{1,lm}} = -\mathcal{I}_0 \nu_{lm} \int_0^1 e^{-\imath\zeta n'} \cosh[\nu_{lm}(n'-1)]\, dn',$$

$$\mathcal{I}_{n_{2,lm}} = -\mathcal{I}_0 K_C\, \omega'^2 \int_0^1 e^{-\imath\zeta n'} \operatorname{senh}[\nu_{lm}(n'-1)]\, dn',$$

$$\mathcal{I}_{n_{3,lm}} = +\mathcal{I}_1 \int_0^1 e^{-\imath\zeta n'} \cosh(\nu_{lm} n')\, dn',$$

i quali portano a scrivere che [posizione (B.22)]:

$$\int_0^1 e^{-\imath\zeta n'} N_{lm}(n')\, dn' = \frac{\mathcal{I}_{n_{3,lm}} + \mathcal{I}_{n_{2,lm}} + \mathcal{I}_{n_{1,lm}}}{\mathcal{D}_{lm}}.$$

Questi integrali possono essere calcolati in forma chiusa tramite i risultati (B.5), (B.6), (B.7).

Componente tangenziale

Rispetto alla componente radiale, l'unico cambiamento consiste in $\operatorname{sen}\chi$ in luogo di $\cos\chi$. Pertanto, e per via della (B.2), risulta:

$$\boxed{\hat{\underline{f}}^{(BH,j)}_{T,lm} = \imath\, \hat{\underline{f}}^{(BH,j)}_{R,lm}\,.}$$

4.5.2 Forze agenti sulle pale

La struttura del calcolo è simile a quella di §4.4.2; uniche differenze: N_{lm} e R_{lm} in luogo di N_k e R_{km}.

La forza totale dovuta all'eccitazione delle pale agente sulle pale stesse è:

$$F^{(BB)} = \operatorname{Re}\left\{ \sum_{j=1}^{N_B} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{F}^{(BB,j)}_{lm} \right\},$$

con

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{F}}_{lm}^{(BB,j)} = &- \imath\,\omega'\,\rho_L e^{-\imath\,\omega' t} N_{lm}(0) \int_{r_H}^{r_T} \left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m(s') \begin{pmatrix} -\boldsymbol{e}_R P \operatorname{sen} \chi_0 \\ +\boldsymbol{e}_T P \cos \chi_0 \\ +\boldsymbol{e}_z 2\pi r' \end{pmatrix} ds' \right] R_{lm}(r')\, dr' \\
&- \frac{\Omega_F'}{2\pi} \rho_L e^{-\imath\,\omega' t} N_{lm}(0) \int_{r_H}^{r_T} \left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m'(s') \begin{pmatrix} -\boldsymbol{e}_R P \operatorname{sen} \chi_0 \\ +\boldsymbol{e}_T P \cos \chi_0 \\ +\boldsymbol{e}_z 2\pi r' \end{pmatrix} ds' \right] R_{lm}(r')\, dr' \\
&+ \imath\,\omega'\,\rho_L e^{-\imath\,\omega' t} N_{lm}(1) \int_{r_H}^{r_T} \left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m(s') \begin{pmatrix} -\boldsymbol{e}_R P \operatorname{sen} \chi_1 \\ +\boldsymbol{e}_T P \cos \chi_1 \\ +\boldsymbol{e}_z 2\pi r' \end{pmatrix} ds' \right] R_{lm}(r')\, dr' \\
&+ \frac{\Omega_F'}{2\pi} \rho_L e^{-\imath\,\omega' t} N_{lm}(1) \int_{r_H}^{r_T} \left[\int_{s_1'}^{s_2'} S_m'(s') \begin{pmatrix} -\boldsymbol{e}_R P \operatorname{sen} \chi_1 \\ +\boldsymbol{e}_T P \cos \chi_1 \\ +\boldsymbol{e}_z 2\pi r' \end{pmatrix} ds' \right] R_{lm}(r')\, dr'.
\end{aligned}$$

Componente radiale

Si ottiene, tramite le posizioni (B.15), (B.10) e (B.11):

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{\mathbf{f}}}_{R,lm}^{(BB,j)} = &- \omega'\rho_L N_{lm}(0)\, P e^{2\imath\pi s_1' - \imath\theta_j} \frac{N_R}{2\pi} \mathcal{P}_{1_m} \mathcal{I}_{R_{lm}} \\
&+ \imath\,\frac{\Omega_F'}{4\pi} \rho_L N_{lm}(0)\, P\, m\, e^{2\imath\pi s_1' - \imath\theta_j}\, \mathcal{P}_{2_m} \mathcal{I}_{R_{lm}} \\
&+ \omega'\rho_L N_{lm}(1)\, P\, e^{-\imath\,(\theta_j + c - 2\pi s_1')} \frac{N_R}{2\pi} \mathcal{P}_{1_m} \mathcal{I}_{R_{lm}} \\
&- \imath\,\frac{\Omega_F'}{4\pi} \rho_L N_{lm}(1)\, P\, m\, e^{-\imath\,(\theta_j + c - 2\pi s_1')} \mathcal{P}_{2_m} \mathcal{I}_{R_{lm}},
\end{aligned}$$

in cui (con la posizione (B.22)):

$$\begin{aligned}
N_{lm}(0) &= \frac{\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_0\,[\nu_{lm} \cosh \nu_{lm}]}{\mathcal{D}_{lm}}, \\
N_{lm}(1) &= \frac{\mathcal{I}_1 \cosh \nu_{lm} - \mathcal{I}_0 \left[K_C \omega'^2 \operatorname{senh} \nu_{lm} + \nu_{lm} \right]}{\mathcal{D}_{lm}}.
\end{aligned}$$

Componente tangenziale

Rispetto alla componente radiale, l'unico cambiamento consiste in $-\cos \chi_i$ in luogo di $\operatorname{sen} \chi_i$. Pertanto, e per via della (B.1), risulta:

$$\boxed{\hat{\underline{\mathbf{f}}}_{T,lm}^{(BB,j)} = \imath\,\hat{\underline{\mathbf{f}}}_{R,lm}^{(BB,j)}}\,.$$

CAPITOLO 5

Risultati e discussione

"All's well that ends well; still the fine's the crown;
Whate'er the course, the end is the renown."
— *William Shakespeare,* All's well that ends well

5.1 Confronto dei risultati coi dati sperimentali

Le previsioni del presente modello vengono confrontate con l'esperimento condotto con l'induttore descritto nella tabella A.1 a pag. 139.

Le figure 5.1 e 5.2 mostrano alcuni risultati sperimentali tipici per la forza rotodinamica adimensionalizzata $\tilde{f} = \overline{F}/\pi\varepsilon^2 P\rho_L\Omega^2 r_T$ sull'induttore dell'esperimento in condizioni con cavitazione sviluppata a $\phi_1 = 0.049$ e $\sigma_1 = 0.106$. Vi si nota che le componenti radiale e tangenziale della forza non sono paraboliche con la velocità normalizzata ω/Ω, e che il loro comportamento è caratterizzato da molteplici attraversamenti dello zero. La componente radiale (fig. 5.1a) (i) è sostanzialmente positiva per $\omega/\Omega < -0.2$, (ii) oscilla sopra e sotto lo zero per $-0.2 < \omega/\Omega < 0.3$, (iii) e resta essenzialmente negativa (stabilizzante) per $\omega/\Omega > 0.3$. Un comportamento simile è stato osservato anche per altri numeri di cavitazione (Bhattacharyya, 1994). La componente tangenziale (fig. 5.1b) è positiva sopra la maggior parte delle velocità dell'esperimento, tuttavia mostra oscillazioni rapide vicino all'origine. In tutti gli esperimenti di Bhattacharyya, una caratteristica peculiare della componente tangenziale è il manifestarsi di un picco ripido positivo (destabilizzante) a $\omega/\Omega \approx 0.2$, di intensità crescente con numeri di cavitazione maggiori e coefficienti di flusso minori.

La figura 5.1 mostra anche le forze rotodinamiche predette dal modello presente, nel caso di $\mathsf{Re}\left\{K_C\Omega^2\right\} = 2.5$ per il parametro di cavitazione e $\zeta = 0.045$ per il coefficiente adimensionale di smorzamento. S'è usato un valore efficace (cfr. §4.1) della lunghezza adimensionale dei canali ($N_R = 0.285$) intermedio tra la lunghezza geometrica delle pale e la loro lunghezza in sovrapposizione. Inoltre, il gradiente di pressione del flusso medio è stato calcolato per un valore diminuito efficace (cfr. §4.2) della velocità di rotazione Ω al fine di tener conto della (reale) graduale accelerazione del flusso che entra nell'induttore.[1]

L'influenza del parametro di cavitazione sulla soluzione viene illustrato dai grafici della figura 5.3. La figura 5.4 presenta risultati simili, estendendo il calcolo a valori probabilmente inusati del rapporto ω/Ω. Queste figure mostrano in modo chiaro che il grado di cavitazione ha un ruolo fondamentale nella localizzazione delle velocità critiche e nella determinazione della grandezza delle forze rotodinamiche in funzione del rapporto di velocità ω/Ω. Vengono predetti due insiemi di risonanze subsincrone e supersincrone. A valori molto grandi del parametro di cavitazione, la grandezza delle risonanze diminuisce e le frequenze si avvicinano alla condizione sincrona. A valori molto bassi di $\mathsf{Re}\left\{K_C\Omega^2\right\}$, la frazione di vuoto vìola presumibilmente la condizione (pag. 33) per la sopravvivenza dello strato cavitante durante un ciclo completo di oscillazione del moto eccentrico:

$$(\alpha\,\delta)_{min} \approx \varepsilon\ \sin\beta_M \tag{2.68}$$

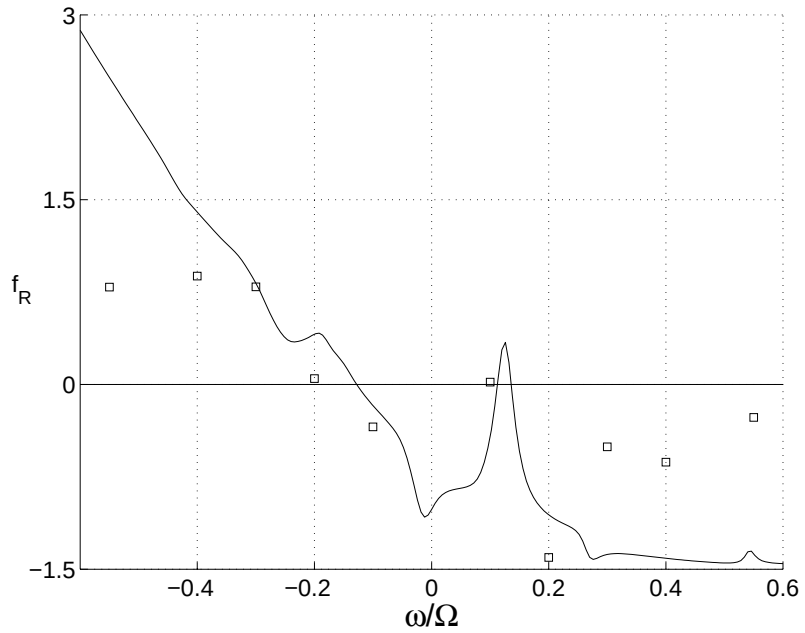
Con scelte tipiche delle quantità rilevanti, si stima che la frazione di vuoto minima per la validità del modello sia $\alpha_{min} \approx 10^{-2} \div 10^{-1}$. Pertanto, con riferimento ai risultati della figura 2.8, le soluzioni fisicamente significanti della teoria presente sono limitati in basso da valori minimi del parametro di cavitazione dell'ordine:

$$\mathsf{Re}\left\{K_C\,\Omega^2\right\}_{min} \approx 1 \div 10,$$

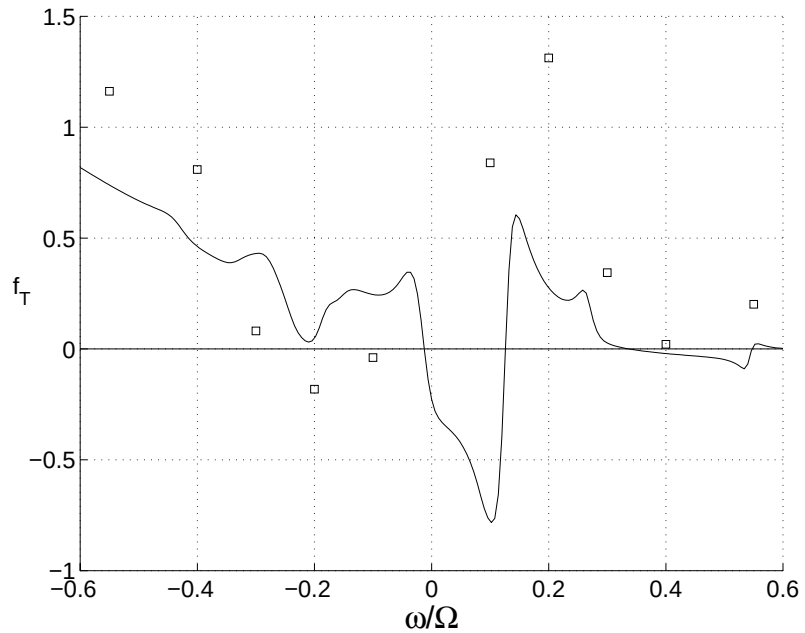
le quali corrispondono rispettivamente a temperatura ambiente e a condizioni di ebollizione. In questo intervallo, la figura 5.3 indica la presenza di due velocità subcritiche, relativamente deboli, vicino a $\omega/\Omega \approx 0.5$, ed una seconda coppia di velocità supersincrone, molto più intense, in vicinanza di $\omega/\Omega \approx 1.5$.

Il confronto dei dati della figura 5.1 coi risultati della figura 5.3 indica che le informazioni sperimentali (scarse) attualmente disponibili sul comportamento delle forze rotodinamiche in turbopompe cavitanti coprono soltanto una piccola porzione dello spettro di frequenze e, probabilmente, non le più significative, in relazione all'innesco di instabilità di questo tipo.

[1] Questo gradiente di pressione modifica soltanto la componente radiale della forza.

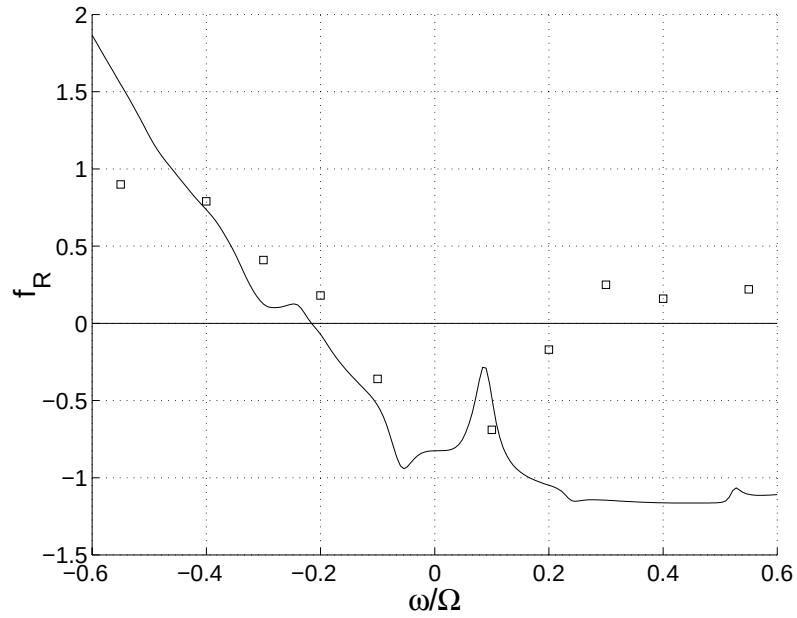


(a) Forza rotodinamica radiale

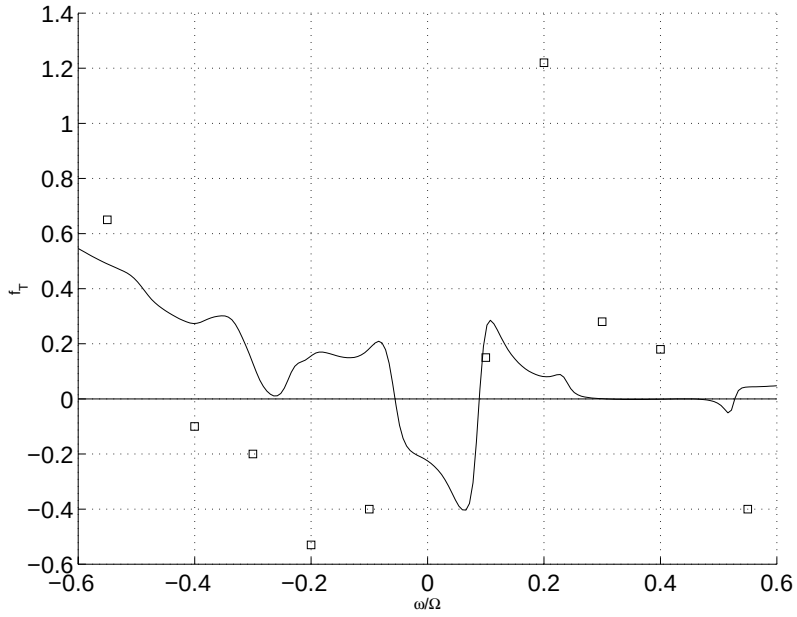


(b) Forza rotodinamica tangenziale

Figura 5.1: Forze rotodinamiche adimensionali f_R e f_T in funzione del rapporto ω/Ω delle velocità di rotazione del rotore e dell'eccentricità — I valori sperimentali (cerchi) ottenuti da Bhattacharyya con l'induttore nelle condizioni della tabella A.2 vengono confrontati colle predizioni del modello (linea continua) coi valori $\phi = \phi_1/(1 - r_H^2/r_T^2) = 0.0583$, $\mathrm{Re}\left\{K_C\,\Omega^2\right\} = 2.5$, $\zeta = 0.045$, $N_R = 0.285$, $\Omega^*/\Omega = 23\%$.

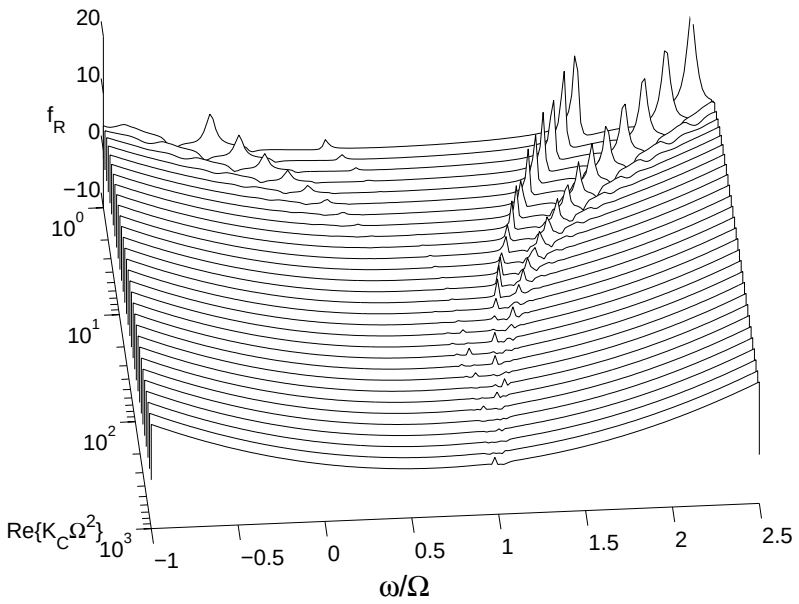


(a) Forza rotodinamica radiale

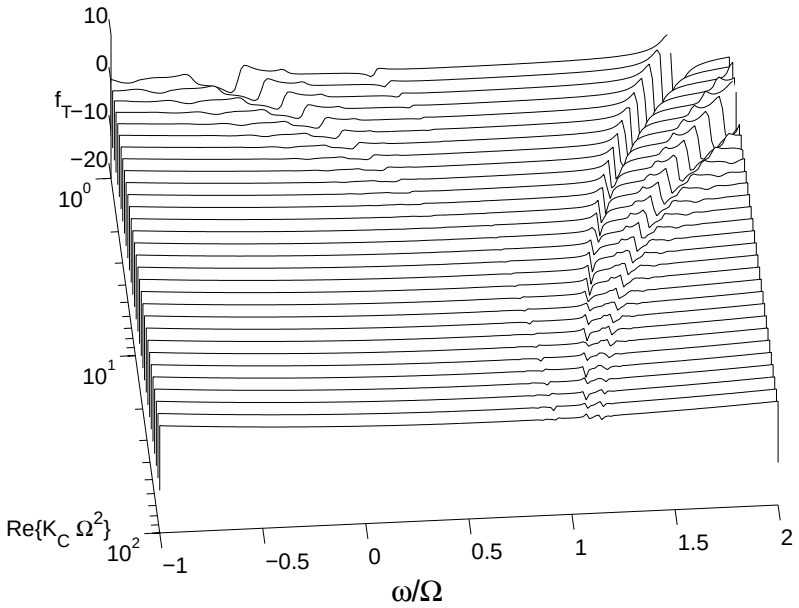


(b) Forza rotodinamica tangenziale

Figura 5.2: Forze rotodinamiche adimensionali f_R e f_T in funzione del rapporto ω/Ω delle velocità di rotazione del rotore e dell'eccentricità — I valori sperimentali (cerchi) ottenuti da Bhattacharyya con l'induttore nelle condizioni della tabella A.3 vengono confrontati colle predizioni del modello (linea continua) coi valori $\phi = \phi_1/(1 - r_H^2/r_T^2) = 0.0881$, $\mathrm{Re}\left\{K_C\,\Omega^2\right\} = 2.3$, $\zeta = 0.045$, $N_R = 0.285$, $\Omega^*/\Omega = 23\%$.

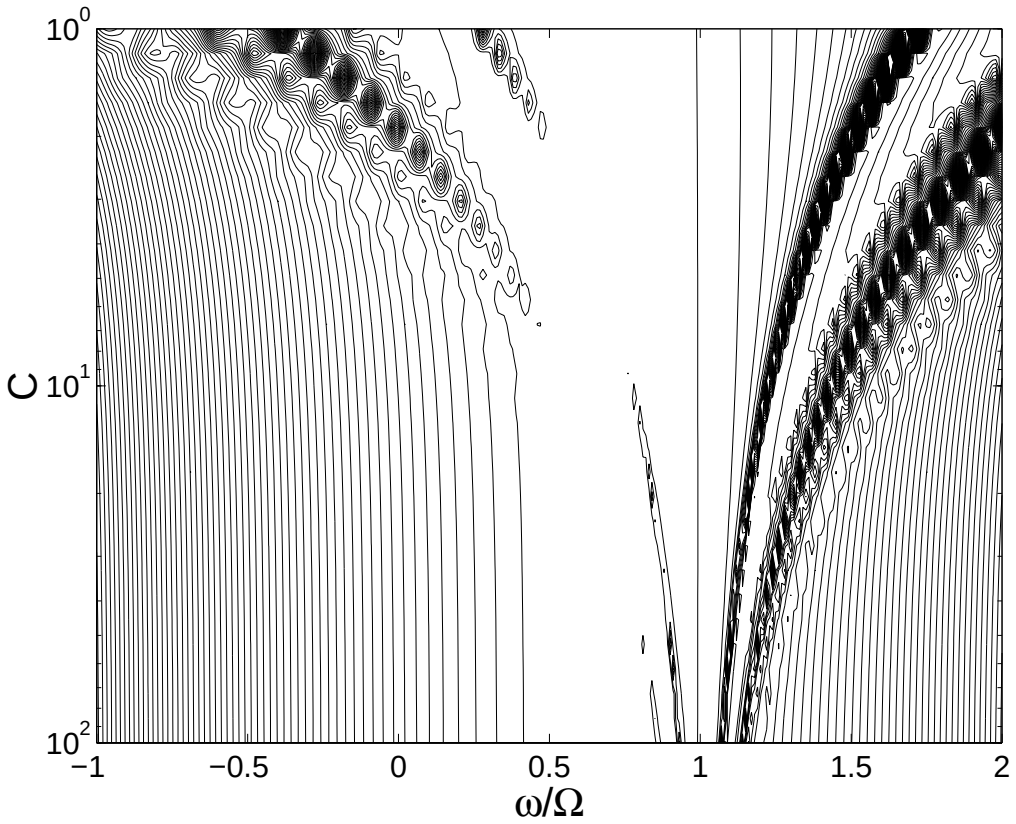


(a) Forza radiale

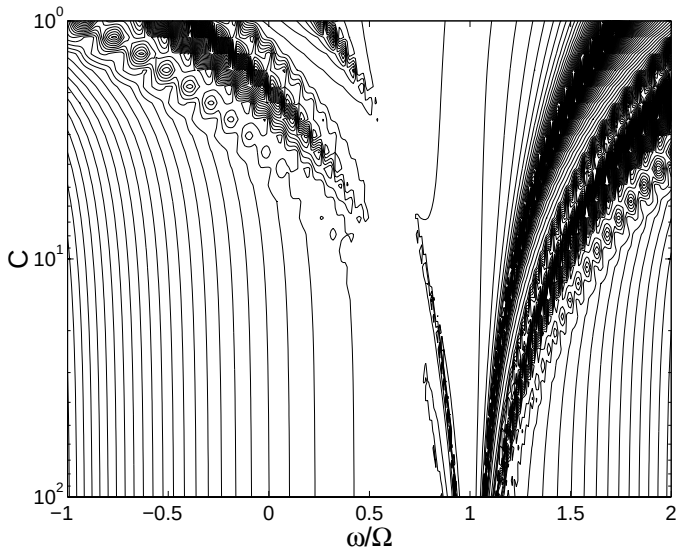


(b) Forza tangenziale

Figura 5.3: Forze rotodinamiche adimensionalizzate f_R e f_T sull'induttore di prova, nelle condizioni della tabella A.2, in funzione del rapporto ω/Ω e del parametro $\mathcal{C}$ — I calcoli sono stati eseguiti con coefficiente di flusso di $\phi = 0.0583$, coefficiente adimensionale di smorzamento di $\zeta = 0.045$, lunghezza effettiva dei canali tra le pale di $N_R = 0.285$ e velocità di rotazione effettiva di $\Omega^*/\Omega = 23\%$.



(a) Forza radiale



(b) Forza tangenziale

Figura 5.4: Visualizzazione "dall'alto" delle forze rotodinamiche adimensionalizzate sull'induttore di prova nelle condizioni della tabella A.2 in funzione del rapporto ω/Ω delle pulsazioni dei moti eccentrico e rotatorio e del parametro $\mathcal{C}$ — Nel modello, il coefficiente di flusso è $\phi = 0.0583$, il coefficiente adimensionale di smorzamento è $\zeta = 0.045$, la lunghezza effettiva dei canali tra le pale è $N_R = 0.285$ e la velocità di rotazione effettiva è data da $\Omega^*/\Omega = 23\%$.

5.2 Osservazioni sui risultati

Il confronto coi dati sperimentali mostra che, nonostante la sua natura approssimata, la teoria presente cattura correttamente la grandezza osservata delle forze rotodinamiche e le caratteristiche salienti del loro spettro di frequenze di moto eccentrico, comprendendo i loro effetti stabilizzanti o destabilizzanti sul moto eccentrico dell'induttore.

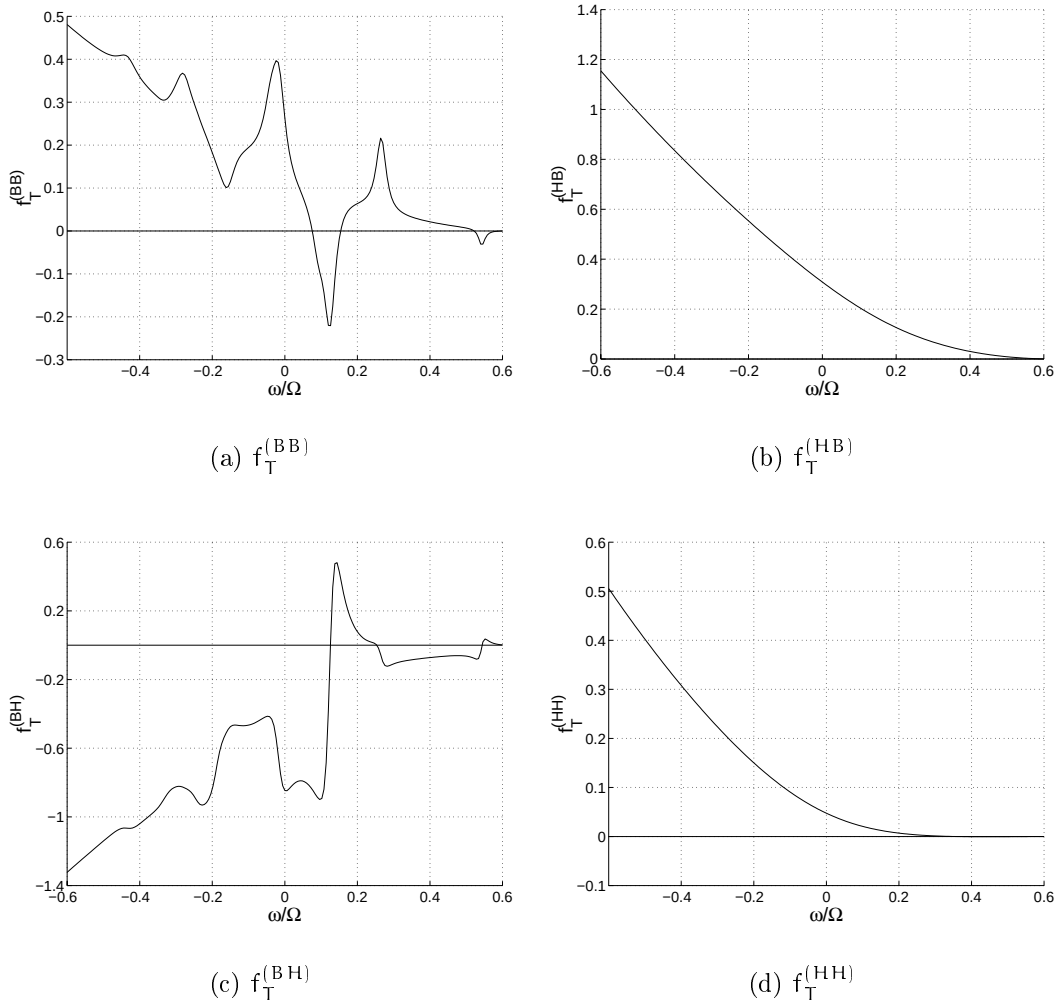
La complicata dipendenza delle forze da ω/Ω è dovuta a risonanze interne del flusso cavitante nei canali tra le pale sotto l'eccitazione del moto eccentrico dell'induttore. Il sistema mostra un insieme infinito (e generalmente complesso) di frequenze critiche *reali*

$$\omega'_{lm} = \omega_{lm} - \Omega = \pm\sqrt{\frac{\nu_{lm}\tanh\nu_{lm}}{K_C}}, \tag{2.98}$$

disposte simmetricamente sotto e sopra la condizione sincrona data da Ω. Si osserva che le velocità critiche dipendono dal numero modale delle perturbazioni del flusso e dal parametro K_C. L'entità della cavitazione s'ingrandisce quando K_C viene portato da zero (che corrisponde a un flusso completamente bagnato) a valori sempre più grandi. Nel caso particolare descritto dall'assenza di smorzamento ($\zeta = 0$), K_C è reale ed il problema di valori al contorno per $\hat{\varphi}$ è auto-aggiunto, con valori reali degli autovalori λ^2 e ν^2. Invece, con smorzamento, la serie per $\hat{\varphi}$ converge rapidamente anche per bassi valori di $\zeta \ll 1$, e solo i primi (pochi) modi si rendono necessari per i calcoli; per questi modo gli autovalori sono dell'ordine di uno o leggermente maggiori. Dal momento che i flussi cavitanti sono intrinsecamente dissipativi, le velocità critiche per ω/Ω di interesse pratico tendono a concentrarsi in due piccoli intervalli appena sopra e sotto le condizioni sincrone — non appena l'intensità della cavitazione basta ad alzare la parte reale di $K_C\Omega^2$ ben al di sopra dell'unità.

Esaminando separatamente le forze, come è stato fatto nella figura 5.5,[2] è possibile vedere che i picchi sono introdotti dalle forze dovute all'eccitazione delle pale; viceversa quelle dovute all'eccitazione del mozzo si mantengono paraboliche.

[2]Viene presentato il risultato relativo alle sole forze tangenziali, sia perché le posizioni dei picchi coincidono con quelle nelle forze radiali, sia perché ha più senso considerare separatamente le componenti tangenziali perché, differentemente da quanto avviene per le forze agenti radialmente, il contributo dovuto al gradiente di pressione del flusso medio è nullo.



(a) $f_T^{(BB)}$ (b) $f_T^{(HB)}$

(c) $f_T^{(BH)}$ (d) $f_T^{(HH)}$

Figura 5.5: Forze tangenziali esaminate separatamente al variare di ω/Ω — I valori usati nel modello sono $\phi = \phi_1/(1 - r_H^2/r_T^2) = 0.0583$, $\mathrm{Re}\left\{K_C\,\Omega^2\right\} = 2.5$, $\zeta = 0.045$, $N_R = 0.285$.

Parte II

Induttori centrifughi

CAPITOLO 6

Modello matematico per un induttore con pale logaritmiche

"That beads of sweat have stood upon thy brow
like bubbles in a late-disturbed stream"
— William Shakespeare, King Henry IV

6.1 Ipotesi

Flusso imperturbato in ingresso ($_1$) Il flusso imperturbato in ingresso (stadio 1) è (i) assialsimmetrico, (ii) non viscoso, (iii) irrotazionale, (iv) di velocità $\mathbf{u}_1$ nulla, (v) completamente bagnato di densità ρ_L, (vi) di pressione totale $\overline{p}_{t_1}$ uniforme.

Geometria L'induttore (fig. 6.1) ha (i) N_B pale, (ii) di forma a spirale logaritmica (equiangolare: β è costante lungo ciascuna pala), (iii) con curvatura all'indietro per $\Omega > 0$, (iv) di spessore nullo, (v) di larghezza (profondità lungo z) costante pari a b.

Moto della girante La girante ha velocità di rotazione Ω costante, (i) velocità del moto eccentrico ω costante, (ii) eccentricità costante e piccola, $\varepsilon << r_T$.

Flusso nell'induttore Il flusso imperturbato ($\varepsilon \equiv 0$) è rotazionale, (i) non viscoso, (ii) assialsimmetrico, (iii) completamente bagnato con densità ρ_L. (iv) C'è un sottile e *non* uniforme strato di cavitazione sul lato di aspirazione delle pale (cfr. pag. 97), con frazione di vuoto α. (v) La velocità assiale è nulla; (vi) il flusso è completamente guidato (la velocità relativa è parallela alla superficie delle pale).

Flusso in uscita ($_2$) Il flusso in uscita (i) non ha componente assiale; è (ii) assialsimmetrico, (iii) rotazionale, (iv) completamente bagnato con densità ρ_L.

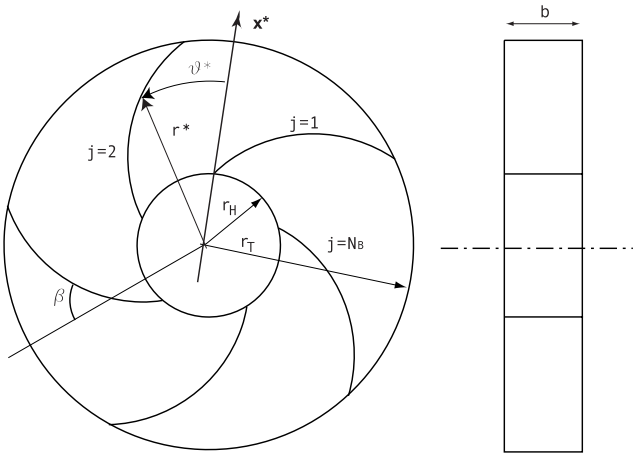


Figura 6.1: Disegno schematico dell'induttore centrifugo schematizzato nel modello — Vi è sovrapposto il sistema di coordinate polari (r^*, θ^*, z^*). Il verso positivo per gli angoli e per la velocità angolare è antiorario (l'asse z della profondità è uscente dal foglio). Gli angoli θ^* sono misurati a partire dall'asse x^*, solidale con il rotore e passante pel bordo di attacco della prima pala. Ogni pala è caratterizzata da $\tan(-\beta) = \frac{r\, d\theta}{dr} = \text{costante}$.

6.2 Flusso imperturbato nell'induttore

Differentemente dal caso assiale, $\overline{u}$ varia con r, mentre β è costante.

Si definisce il coefficiente di flusso

$$\phi = \frac{\text{portata volumetrica}}{(\text{area} \times \text{velocità}) \text{ in uscita}} = \frac{\overline{u}_T}{\Omega\, r_T}. \tag{6.1}$$

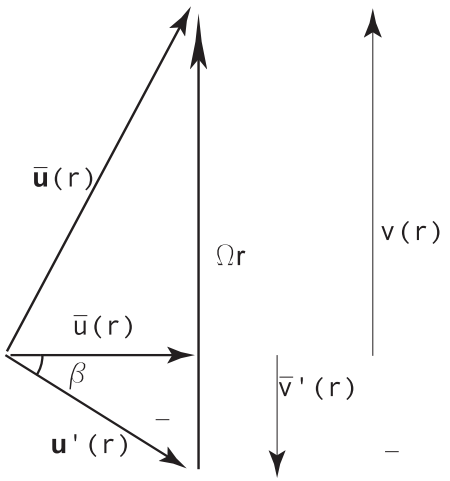


Figura 6.2: Triangolo delle velocità ad una sezione con r generica

Dalla definizione di pressione totale:

$$\frac{\overline{p}_t(r)}{\rho_L} = \frac{\overline{p}(r)}{\rho_L} + \frac{1}{2}\left[\overline{v}^2(r) + \overline{u}^2(r)\right]. \tag{6.2}$$

Dal triangolo delle velocità (fig. 6.2):

$$\overline{v}(r) = -\overline{v}'(r) + \Omega\, r = -\overline{u}(r)\tan\beta + \Omega\, r,$$

da cui:

$$\overline{v}^2(r) = \overline{u}^2(r)\tan^2\beta + \Omega^2 r^2 - 2\,\Omega\, r\,\overline{u}(r)\tan\beta.$$

Questa può scriversi, per la continuità di massa

$$r\,\overline{u}(r) = \text{costante} = r_T \overline{u}_T \tag{6.3}$$

e in termini del coefficiente di flusso ϕ:

$$\overline{v}^2(r) = \Omega^2\phi^2\frac{r_T^4}{r^2}\tan^2\beta + \Omega^2 r^2 - 2\Omega^2 r_T^2\phi\tan\beta.$$

6.3 Coordinate cilindriche

Equivalgono a quelle definite pel caso elicoidale (§2.3.1).

6.4 Equazioni di governo e di perturbazione

Equivalgono a quelle definite pel caso elicoidale (§2.4 e §2.5).

6.5 Coordinate omogenee ortonormali su famiglie di spirali logaritmiche

Per la descrizione del campo nell'induttore centrifugo, viene adottato un sistema di coordinate ortonormali su famiglie di spirali logaritmiche (Campos e Gil, 1995; Visser, 1999). È stato scartato un approccio con trasformazioni conformi (Visser *et al.*, 1994), il quale non si adatta ad una girante dotata anche di moto eccentrico.

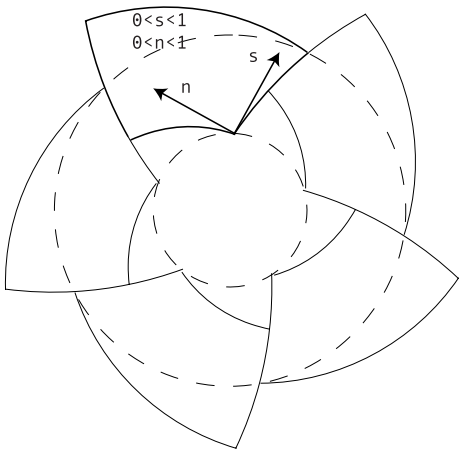


Figura 6.3: Sistema di coordinate ortonormali (s, n) su famiglie di spirali logaritmiche — La linea più spessa indica la forma effettiva del vano mappato con questo sistema di coordinate, in cui ciascuna parete è caratterizzata da una sola coordinata.

Dette s l'ascissa curvilinea lungo la spirale logaritmica e n l'ascissa lungo la spirale complementare, le equazioni delle spirali principali (orientate come le pale) e delle spirali complementare (orientate secondo l'angolo complementare) sono rispettivamente:

$$\left(\frac{r\,d\theta}{dr}\right)_n = -\tan\beta, \tag{6.4}$$

$$\left(\frac{r\,d\theta}{dr}\right)_s = \cot\beta. \tag{6.5}$$

Siano

$$\theta_j = \theta_{Hj} = \frac{2\pi}{N_B}(j-1), \quad j = 1, 2, \ldots, N_B$$

le posizioni angolari, espresse nel riferimento solidale al rotore, del bordo d'attacco delle pale, tali che il b.a. della prima pala passi per l'asse x^* ovvero per $\theta^* = 0$; quindi è $\theta_1 = 0$.

Coordinata s: si indichi con dl_s la lunghezza di un arco elementare misurato sulle spirali principali (6.4) e si definisca la coordinata s tramite la relazione

$$dl_s = \frac{ds}{\kappa_s \cos\beta} r$$

La relazione tra questo arco e le coordinate polari è:

$$dl_s = \frac{dr}{\cos\beta} = -\frac{r\, d\theta}{\operatorname{sen}\beta}$$

perciò

$$ds = \kappa_s \frac{dr}{r} = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\kappa_s\frac{dr}{r}\operatorname{sen}\beta\cos\beta = (\tan\beta + \cot\beta)\kappa_s\frac{dr}{r}\operatorname{sen}\beta\cos\beta.$$

Sostituendovi il valore della tangente di β dato dalla (6.4):

$$ds = \left(-r\frac{d\theta}{dr} + \cot\beta\right)\kappa_s\frac{dr}{r}\operatorname{sen}\beta\cos\beta = -\kappa_s\operatorname{sen}\beta\cos\beta\, d\theta + \kappa_s\cos^2\beta\frac{dr}{r},$$

e integrando lungo una spirale principale, dal b.a. fino a un punto generico, ponendo $s_H = 0$:

$$s = -(\theta - \theta_j)\kappa_s\operatorname{sen}\beta\cos\beta + \log\left(\frac{r}{r_H}\right)\kappa_s\cos^2\beta. \tag{6.6}$$

Per determinare κ_s, si impone che sia $s_T = 1$. Calcolato che

$$\theta_{Tj} - \theta_j = \int_H^T d\theta = -\int_H^T \tan\beta\frac{dr}{r} = -\tan\beta\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right),$$

risulta

$$\begin{aligned} s_T &= -(\theta_{Tj} - \theta_j)\kappa_s\operatorname{sen}\beta\cos\beta + \log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)\kappa_s\cos^2\beta \\ &= \tan\beta\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)\kappa_s\operatorname{sen}\beta\cos\beta + \log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)\kappa_s\cos^2\beta \\ &= \log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)\kappa_s(\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta) \\ &= \kappa_s\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right) \end{aligned}$$

e perciò

$$\kappa_s = 1 \Big/ \log\left(\frac{r_T}{r_H}\right).$$

Questo valore, inserito nella (6.6), fornisce la definizione della coordinata s in funzione delle coordinate polari:

$$\boxed{\theta - \theta_j = \cot\beta \log\frac{r}{r_H} - \frac{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)}{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}s.} \tag{6.7}$$

Coordinata n: si indichi con dl_n la lunghezza di un arco elementare misurato sulle spirali principali (6.5) e si definisca la coordinata n tramite la relazione

$$dl_n = \frac{dn}{\kappa_n \operatorname{sen}\beta} r$$

La relazione tra questo arco e le coordinate polari è:

$$dl_n = \frac{dr}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{r\,d\theta}{\cos\beta}$$

perciò

$$dn = \kappa_n\frac{dr}{r} = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\kappa_n\frac{dr}{r}\operatorname{sen}\beta\cos\beta = (\tan\beta + \cot\beta)\kappa_n\frac{dr}{r}\operatorname{sen}\beta\cos\beta.$$

Sostituendovi il valore della cotangente di β dato dalla (6.5):

$$dn = \left(\tan\beta + \frac{r\,d\theta}{dr}\right)\kappa_n\frac{dr}{r}\operatorname{sen}\beta\cos\beta = \kappa_n\frac{dr}{r}\operatorname{sen}^2\beta + \kappa_n d\theta\operatorname{sen}\beta\cos\beta.$$

Per determinare la differenza angolare $\theta_Q - \theta_P$ tra due punti su una stessa generica spirale complementare, appartenenti a due pale successive (fig. 6.4), si osservi che l'equazione della $j-$sima pala è

$$\log\frac{r}{r_H} = -(\theta - \theta_j)\cot\beta \tag{6.8}$$

e che l'equazione di una generica spirale complementare è

$$\log\frac{r}{r_H} = (\theta - \theta_j)\tan\beta + y;$$

pertanto il valore di y che determina la spirale passante per il punto Q è dato dal sistema

$$\begin{cases} \log\frac{r_Q}{r_H} = (\theta_{j+1} - \theta_Q)\cot\beta \\ \log\frac{r_Q}{r_H} = -(\theta_j - \theta_Q)\tan\beta + y \end{cases}$$

che corrisponde a

$$y = \frac{2\pi}{N_B \tan\beta} + \frac{\theta_j - \theta_Q}{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}.$$

Le coordinate del punto P si ottengono allora col sistema

$$\begin{cases} \log\frac{r_P}{r_H} = (\theta_j - \theta_P)\cot\beta \\ \log\frac{r_P}{r_H} = -(\theta_j - \theta_P)\tan\beta + \frac{2\pi}{N_B\tan\beta} + \frac{\theta_j - \theta_Q}{\operatorname{sen}\beta\cos\beta} \end{cases}$$

col quale si ottiene

$$\theta_Q - \theta_P = \frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta.$$

Inoltre, visto che P e Q appartengono alla stessa spirale complementare, le due seguenti espressioni sono entrambe vere:

$$\log\frac{r_Q}{r_H} = (\theta_Q - \theta_j)\tan\beta + y,$$
$$\log\frac{r_P}{r_H} = (\theta_P - \theta_j)\tan\beta + y;$$

sottraendo l'una dall'altra, e sfruttando la differenza angolare precedentemente calcolata:

$$\log\frac{r_Q}{r_P} = (\theta_Q - \theta_P)\tan\beta = \frac{2\pi}{N_B}\cos\beta\operatorname{sen}\beta.$$

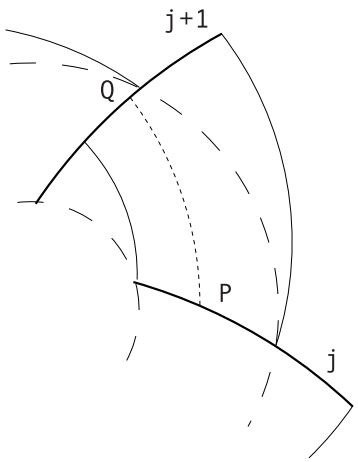


Figura 6.4: P e Q sono due punti su una stessa generica spirale complementare, appartenenti a due pale successive

Dunque, integrando tra questi due punti:

$$\begin{aligned} n_Q - n_P &= \int_P^Q dn = \kappa_n \operatorname{sen}^2\beta \int_P^Q \frac{dr}{r} + \kappa_n \operatorname{sen}\beta\cos\beta \int_P^Q d\theta \\ &= \kappa_n \operatorname{sen}^2\beta \frac{2\pi}{N_B}\cos\beta\operatorname{sen}\beta + \kappa_n \operatorname{sen}\beta\cos\beta\frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta \\ &= \frac{2\pi}{N_B}\kappa_n \operatorname{sen}\beta\cos\beta. \end{aligned}$$

Volendo che sia $n_Q - n_P = 1$, dev'essere:

$$\kappa_n = \frac{N_B}{2\pi\cos\beta\operatorname{sen}\beta},$$

da cui

$$dn = \frac{N_B}{2\pi\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\operatorname{sen}^2\beta\frac{dr}{r} + \frac{N_B}{2\pi\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\operatorname{sen}\beta\cos\beta\, d\theta.$$

Scegliendo $n_P = 0$ e integrando tra P e un punto generico:

$$n = \int_P^n dn = \frac{N_B}{2\pi}\tan\beta\int_{r_P}^r \frac{dr}{r} + \frac{N_B}{2\pi}\int_{\theta_P}^\theta d\theta$$

ovvero

$$n = \frac{N_B}{2\pi}\tan\beta\log\frac{r}{r_P} + \frac{N_B}{2\pi}(\theta - \theta_P). \tag{6.9}$$

Infine, siccome P è anche un punto appartenente alla j–sima pala, deve essere soddisfatta l'equazione:

$$0 = -\log\frac{r_P}{r_H} + (\theta_j - \theta_P)\cot\beta$$

cioè, moltiplicata per $\frac{N_B}{2\pi}\tan\beta$:

$$0 = \tan\beta\frac{N_B}{2\pi}\log\frac{r_H}{r_P} + \frac{N_B}{2\pi}(\theta_j - \theta_P). \tag{6.10}$$

Sottraendo le due equazioni $((6.9) - (6.10))$:

$$n = \frac{N_B}{2\pi}\tan\beta\log\frac{r}{r_H} + \frac{N_B}{2\pi}\left[-(\theta_j - \theta_P) + (\theta - \theta_P)\right],$$

si ottiene la relazione tra la coordinata n e le coordinate polari:

$$\boxed{\theta - \theta_j = -\tan\beta\log\frac{r}{r_H} + \frac{2\pi}{N_B}n.} \tag{6.11}$$

Un sistema di coordinate tridimensionale si potrebbe ottenere aggiungendo z (il cui verso positivo nella figura 6.3 è entrante nel foglio). Il **sistema di coordinate** (s, n, z) sarebbe allora **cilindrico su spirali**, in quanto (i) le superfici coordinate con $n = \mathit{costante}$ o $s = \mathit{costante}$ sono cilindri con spirali tra loro ortogonali per direttrici; (ii) $z = \mathit{costante}$ è un piano; (iii) le curve coordinate ($n = \mathit{costante}, z = \mathit{costante}$) e ($s = \mathit{costante}, z = \mathit{costante}$) sono spirali ortogonali nel piano $z = \mathit{costante}$; (iv) la curva coordinata ($s = \mathit{costante}, n = \mathit{costante}$) è una linea retta, ovvero la generatrice comune dei clindri a spirale. Tuttavia, il problema considerato è, per le sue ipotesi, a tutti gli effetti bidimensionale. Di seguito, perciò, si considererà un problema piano nelle coordinate (s, n).

6.5.1 Relazioni tra coordinate polari e coordinate a spirale

Le relazioni tra (r, θ) e (s, n) — similmente tra (r', θ') e (s', n') eccetera — sono dunque date da:

$$\begin{cases} r &= r_H \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^s e^{\frac{\pi \operatorname{sen}(2\beta)}{N_B} n}, \\ \theta &= \theta_j + \frac{2\pi}{N_B} n \cos^2\beta - s \log\left(\frac{r_T}{r_H}\right) \tan\beta, \end{cases}$$

da cui, invertendo (risolvendo per s, n, z):

$$\begin{cases} n &= \frac{N_B}{2\pi}(\theta - \theta_j) + \frac{N_B}{2\pi} \log\frac{r}{r_H} \tan\beta, \\ s &= -\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)}(\theta - \theta_j) + \cos^2\beta \frac{\log\frac{r}{r_H}}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)}. \end{cases}$$

Queste equazioni, che definiscono le nuove coordinate, descrivono la zona tra la $(j+1)$-sima e la j-sima pala, con origine nel bordo di attacco della j-sima. Sono definite in modo che un canale (approssimato) sia compreso in $s, n \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Con le posizioni provvisorie, fatte per semplicità di scrittura:

$$\begin{aligned} k_1 &= \theta_j + \tan\beta \log r_H, \\ k_2 &= \tan\beta, \\ k_3 &= \theta_j - \log r_H / \tan\beta, \\ k_4 &= \frac{2\pi}{N_B}, \\ k_5 &= \frac{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)}{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}, \end{aligned}$$

le (6.7) e (6.11) diventano:

$$\begin{aligned} \theta &= k_1 - k_2 \log r + k_4 n, \\ \theta &= k_3 + \frac{\log r}{k_2} - k_5 s, \end{aligned}$$

da cui:

$$\theta = \frac{k_1 + k_4 n - k_2^2 k_5 s + k_2^2 k_3}{1 + k_2^2},$$
$$\log r = \frac{k_2}{1 + k_2^2}(k_1 - k_3 + k_5 s + k_4 n),$$

e, differenziando:

$$d\theta = \frac{k_4}{1 + k_2^2} dn - \frac{k_2^2 k_5}{1 + k_2^2} ds,$$
$$\frac{dr}{r} = \frac{k_2 k_4}{1 + k_2^2} dn + \frac{k_2 k_5}{1 + k_2^2} ds.$$

La lunghezza dl dell'arco nelle coordinate a spirale si ottiene da

$$(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 = h_s^2(ds)^2 + h_n^2(dn)^2;$$

sostituendovi gli elementi differenziali $d\theta$ e dr:

$$r^2(d\theta)^2 = r^2 \frac{k_4^2}{(1 + k_2^2)^2}(dn)^2 + r^2 \frac{k_2^4 k_5^2}{(1 + k_2^2)^2}(ds)^2 - 2r^2 \frac{k_4 k_5 k_2^2}{(1 + k_2^2)^2} ds\ dn,$$
$$(dr)^2 = r^2 \frac{k_2^2 k_4^2}{(1 + k_2^2)^2}(dn)^2 + r^2 \frac{k_2^2 k_5^2}{(1 + k_2^2)^2}(ds)^2 + 2r^2 \frac{k_2^2 k_4 k_5}{(1 + k_2^2)^2} ds\ dn$$

si ottiene

$$(dl)^2 = \frac{r^2 k_4^2}{1 + k_2^2}(dn)^2 + \frac{k_5^2 r^2 k_2^2}{1 + k_2^2}(ds)^2,$$

in cui è nullo il termine in $ds\ dn$ e *pertanto il sistema di coordinate è ortogonale.* Il fattore di scala, tuttavia, non è lo stesso lungo le due direzioni s e n.

I fattori di scala h_s e h_n, rispettivamente per s e per n, sono:

$$h_s = r k_5 \operatorname{sen} \beta = r_H \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^s \log\left(\frac{r_T}{r_H}\right) e^{\frac{\pi}{N_B} n \operatorname{sen}(2\beta)} \sec \beta,$$
$$h_n = r k_4 \cos \beta = 2\pi r_H \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^s \cos \beta \frac{e^{\frac{\pi}{N_B} n \operatorname{sen}(2\beta)}}{N_B}.$$

La lunghezza di ogni pala risulta dunque, ponendo $n = 0$ nell'espressione per r:

$$\int_{s=0}^{s=1} \frac{r \log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)}{\cos \beta} ds = \int_0^1 r_H \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^s \log\left(\frac{r_T}{r_H}\right) / \cos \beta\ ds = \frac{r_T - r_H}{\cos \beta}.$$

6.5.2 Metrica nel riferimento a spirale

Essendo

$$d\mathbf{l} = \boldsymbol{e}_{s'} h_s \, ds' + \boldsymbol{e}_{n'} h_n \, dn',$$

il gradiente vale

$$\nabla' = \left(\boldsymbol{e}_{s'} \frac{1}{h_s} \frac{\partial}{\partial s'}; \; \boldsymbol{e}_{n'} \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial n'} \right)$$

ovvero

$$\boxed{\nabla' = \left(\boldsymbol{e}_{s'} \frac{e^{-\frac{\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}(2\beta)} \cos\beta}{r_H \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{s'} \log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} \frac{\partial}{\partial s'}; \; \boldsymbol{e}_{n'} \frac{e^{-\frac{\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}(2\beta)} N_B}{2\pi r_H \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{s'} \cos\beta} \frac{\partial}{\partial n'} \right);}$$

il laplaciano vale

$$\nabla'^2 = \frac{1}{h_s h_n} \left[\frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{h_n}{h_s} \frac{\partial}{\partial s'} \right) + \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{h_s}{h_n} \frac{\partial}{\partial n'} \right) \right];$$

I coefficienti h_1 e h_2 non sono costanti con s, ma il loro rapporto lo è, perciò:

$$\boxed{\nabla'^2 = \frac{e^{-\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}(2\beta)} \cos^2\beta}{r_H^2 \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{2s'} \log^2\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} \frac{\partial^2}{\partial s'^2} + \frac{e^{-\frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}(2\beta)} N_B^2}{4\pi^2 \cos^2\beta r_H^2 \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{2s'}} \frac{\partial^2}{\partial n'^2}.} \tag{6.12}$$

6.5.3 Componenti di velocità nel riferimento a spirale

La velocità assoluta è

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u\boldsymbol{e}_r + v\boldsymbol{e}_\theta \\ &= u_s \boldsymbol{e}_s + u_n \boldsymbol{e}_n. \end{aligned}$$

Moltiplicando per $\boldsymbol{e}_r$:

$$\begin{aligned} u = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{e}_r &= u_s \boldsymbol{e}_s \cdot \boldsymbol{e}_r + u_n \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_r \\ &= u_s \cos\beta + u_n \cos(\pi/2 - \beta) \\ &= u_s \cos\beta + u_n \operatorname{sen}\beta; \end{aligned}$$

oppure, moltiplicando per $\boldsymbol{e}_\theta$:

$$\begin{aligned} v = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{e}_\theta &= u_s \boldsymbol{e}_s \cdot \boldsymbol{e}_\theta + u_n \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_\theta \\ &= u_s \cos(\pi/2 + \beta) + u_n \cos\beta \\ &= -u_s \operatorname{sen}\beta + u_n \cos\beta. \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\begin{cases} u &= u_s \cos\beta + u_n \operatorname{sen}\beta, \\ v &= -u_s \operatorname{sen}\beta + u_n \cos\beta, \end{cases}$$

e risolvendo per le componenti in coordinate cilindriche a spirale:

$$\begin{cases} u_s &= u\cos\beta - v\operatorname{sen}\beta, \\ u_n &= +u\operatorname{sen}\beta + v\cos\beta. \end{cases}$$

Similmente per le relazioni nei riferimenti rotanti.

Flusso imperturbato relativo: Poiché è $\overline{u} = \overline{u}'$,

$$\overline{\boldsymbol{u}}' = \overline{u}\boldsymbol{e}_{r'} - \overline{v}'\boldsymbol{e}_{\theta'} = \overline{u}\boldsymbol{e}_{r'} - \overline{u}\tan\beta\,\boldsymbol{e}_{\theta'}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \overline{u}'_{s'} = \overline{\boldsymbol{u}}'\cdot\boldsymbol{e}_{s'} &= \overline{u}\boldsymbol{e}_{r'}\cdot\boldsymbol{e}_{s'} - \overline{u}\tan\beta\boldsymbol{e}_{\theta'}\cdot\boldsymbol{e}_{s'} \\ &= \overline{u}\cos\beta + \overline{u}\tan\beta\operatorname{sen}\beta \\ &= \overline{u}\left(\cos\beta + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta}\right) \\ &= \frac{\overline{u}(r)}{\cos\beta} \\ &= \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{1-s'} \overline{u}_T \sec\beta \exp\left[-\frac{\pi}{N_B}n'\operatorname{sen}(2\beta)\right] \end{aligned} \tag{6.13}$$

(dove s'è cambiato sistema di coordinate e s'è usata la (6.3)) e

$$\begin{aligned} \overline{u}'_{n'} = \overline{\boldsymbol{u}}'\cdot\boldsymbol{e}_{n'} &= \overline{u}\boldsymbol{e}_{r'}\cdot\boldsymbol{e}_{n'} - \overline{u}\tan\beta\boldsymbol{e}_{\theta'}\cdot\boldsymbol{e}_{n'} \\ &= \overline{u}\operatorname{sen}\beta - \overline{u}\tan\beta\cos\beta \\ &= \overline{u}\operatorname{sen}\beta - \overline{u}\operatorname{sen}\beta = 0. \end{aligned}$$

Flusso di perturbazione $\tilde{\boldsymbol{u}}' = \nabla\tilde{\varphi}$: semplicemente sviluppando l'espressione del gradiente e ponendo, di qui in avanti:

$$T = \frac{r_T}{r_H},$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \tilde{u}'_{s'} &= \frac{e^{-\frac{\pi}{N_B}\operatorname{sen}(2\beta)n'}\cos\beta}{r_H T^{s'}\log T}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s'}, \\ \tilde{u}'_{n'} &= \frac{e^{-\frac{\pi}{N_B}\operatorname{sen}(2\beta)n'}N_B}{2\pi r_H T^{s'}\cos\beta}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n'}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

6.6 Equazioni delle superfici nel riferimento rotante (s', n', z', t)

Pala completamente bagnata L'equazione della j-sima pala $n^* = 0$ è, dalla (6.8):

$$b_B(r^*, \theta^*, t) = \theta^* - \theta_j + \tan\beta \log \frac{r^*}{r_H} = 0. \tag{6.15}$$

Con le relazioni (2.10) tra le coordinate fisse e quelle rotanti:

$$b_B(r, \theta, t) = \theta - \Omega t + \frac{\varepsilon}{r}\operatorname{sen}(\theta - \omega t) - \theta_j + \tan\beta \log \frac{r - \varepsilon\cos(\theta - \omega t)}{r_H};$$

usando la (2.9), essendo sempre $\omega' = \omega - \Omega$:

$$b_B(r', \theta', t) = \theta' + \frac{\varepsilon}{r'}\operatorname{sen}(\theta' - \omega' t) - \theta_j + \tan\beta \log \frac{r' - \varepsilon\cos(\theta' - \omega' t)}{r_H};$$

passando alle coordinate a spirale (§6.5.1) e ponendo per semplicità di scrittura:

$$\begin{aligned} \Theta'(s', n', t) =& \theta' - \omega' t = \theta_j + \frac{2\pi}{N_B} n' \cos^2\beta - s' \log T \tan\beta - \omega' t \\ =& \theta_j + \frac{2\pi}{N_B} n' \cos^2\beta - s' \log T \tan\beta - \omega' t, \end{aligned} \tag{6.16}$$

l'equazione della pala nel riferimento a spirale diventa:

$$\begin{aligned} b_B(s', n', t) = \frac{2\pi}{N_B} n' \cos^2\beta - s' \log T \tan\beta + \frac{\varepsilon}{r_H} T^{s'} e^{-\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta n'} \operatorname{sen}\Theta' \\ + \tan\beta \log\left[r_H T^{s'} e^{\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta n'} - \varepsilon\cos\Theta' \right] - \log r_H \tan\beta. \end{aligned}$$

Pala cavitante Sia δ_r lo spessore relativo dello strato cavitante; δ_r è costante lungo s e adimensionalizzato con la larghezza (in direzione n) del canale, variabile con s. Pertanto lo spessore effettivo dello strato cavitante considerato *è crescente con* s e racchiuso tra due superfici a spirale logaritmica, una delle quali è la pala in aspirazione. Perciò $n'_B = n' + \delta_r(t)$ e l'equazione della superficie cavitante, approssimata al primo ordine ($\varepsilon\delta_r \approx 0$, $\exp\delta_r \approx 1$, $\cos\delta_r \approx 1$, $\operatorname{sen}\delta_r \approx \delta_r$), si ottiene — analogamente a quanto fatto per la (2.66) — modificando la condizione al contorno della pala completamente bagnata:

$$\begin{aligned} b_{B_{cav}}(s', n'_B, t) = \frac{2\pi}{N_B}(n' + \delta_r)\cos^2\beta - s' \log T \tan\beta + \frac{\varepsilon}{r_H} T^{s'} e^{-\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta n'} \operatorname{sen}\Theta' \\ + \tan\beta \log\left[r_H T^{s'} e^{\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta n'} - \varepsilon\cos\Theta' \right] - \log r_H \tan\beta. \end{aligned}$$

6.7 Condizioni al contorno in (s', n', t)

Su una superficie generica $b = 0$ è sempre:

$$\frac{D'b}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t} + \tilde{\mathbf{u}}' \cdot \nabla' b = 0$$

ovvero

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \tilde{u}'_{s'} \frac{1}{h_s} \frac{\partial b}{\partial s'} + \tilde{u}'_{n'} \frac{1}{h_n} \frac{\partial b}{\partial n'} = 0,$$

in cui si espande la velocità nelle componenti stazionaria e perturbativa:

$$\begin{aligned} u'_{s'} = \overline{u}'_{s'} + \tilde{u}_{s'} =& T^{1-s'} \overline{u}_T \sec\beta \exp\left[-\frac{\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}(2\beta)\right] \\ &+ \frac{e^{-\frac{\pi}{N_B}\operatorname{sen}(2\beta)n'} \cos\beta}{r_H T^{s'} \log T} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s'}, \\ u'_{n'} = \overline{u}'_{n'} + \tilde{u}_{n'} =& \frac{e^{-\frac{\pi}{N_B}\operatorname{sen}(2\beta)n'} N_B}{2\pi r_H T^{s'} \cos\beta} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n'}. \end{aligned}$$

Per ottenere le equazioni, si linearizza al primo ordine nelle perturbazioni, ovvero si espandono le espressioni in serie di McLaurin attorno a ε e quindi si eseguono le approssimazioni:

$$\varepsilon^2 \approx 0, \quad \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s'} \approx 0, \quad \varepsilon \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n'} \approx 0.$$

Pala completamente bagnata $(n' = 0)$**:**

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n'} = \frac{2\pi}{N_B} \varepsilon \left[r_H T^{s'} \cos^2\beta \operatorname{sen}\beta\, \omega' \left(\frac{\cos\Theta'}{\operatorname{sen}\beta} + \frac{\operatorname{sen}\Theta'}{\cos\beta} \right) + T^{1-s'} \overline{u}_T \operatorname{sen}\Theta' \right].$$

Ingresso e uscita $(s' = 0, 1)$**:** Similmente al caso elicoidale (cfr. pag. 29), si pone

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = 0.$$

Purtroppo, le coordinate usate, a spirale logaritmica, non permettono di descrivere cerchi con l'uso di una sola coordinata — la qual cosa è necessaria per poter risolvere il problema per separazione di variabili (Morse e Feshbach, 1953; Mei, 1995). Il sistema di coordinate scelto descrive invece un rotore come nella figura 6.5, il quale è tanto più vicino a un rotore reale a pale logaritmiche quanto più β è vicino a zero e quanto più grande è il numero di pale N_B.

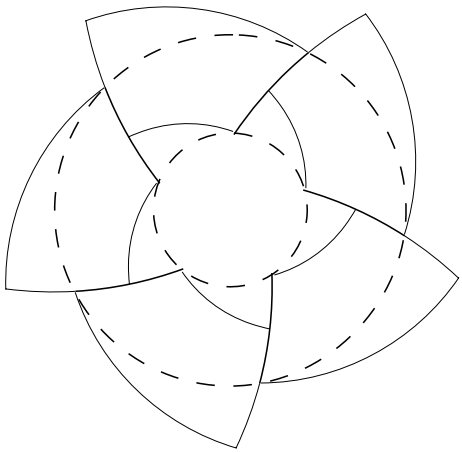


Figura 6.5: Il rotore descritto dalle coordinate su spirali logaritmiche sovrapposto al rotore da descrivere

Pala cavitante ($n' = 0$) La c.c. è diversa da quella per la pala bagnata solo nel termine $\frac{\partial b_B}{\partial t}$. Essa è:

$$\frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta\frac{\delta_T\rho_L}{a_C^2\rho_C}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial t^2}+\frac{N_B}{2\pi r_H^2 T^{2s'}\cos^2\beta\exp\left(\frac{4\pi}{N_B}\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta\right)}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n'}=$$
$$\frac{\varepsilon\omega'\,\mathrm{sen}\,\beta}{r_H T^{s'}\exp\left(\frac{2\pi}{N_B}\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta\right)}\left(\frac{\cos\Theta'}{\mathrm{sen}\,\beta}+\frac{\mathrm{sen}\,\Theta'}{\cos\beta}\right)+\frac{\varepsilon T^{1-s'}\overline{u}_T e^{-\frac{\pi}{N_B}\mathrm{sen}(2\beta)}}{r_H^2 T^{2s'}\exp\left(\frac{4\pi}{N_B}\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta\right)}\frac{\mathrm{sen}\,\Theta'}{\cos^2\beta}. \tag{6.17}$$

Per scrivere questa c.c. sono stati usati i risultati del modello dello strato cavitante:

$$\delta_r\rho_C\approx\text{costante}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\delta_r}{\partial t}=-\frac{\delta_r}{\rho_C}\frac{\partial\rho_C}{\partial t},$$
$$a_C^2=\frac{dp_t}{d\rho_c}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial\rho_C}{\partial t}=\frac{1}{a_C^2}\frac{\partial p_t}{\partial t},$$
$$\frac{\tilde{p}_t}{\rho_L}=-\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial p_t}{\partial t}=-\rho_L\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial t^2},$$

ovvero:

$$\frac{\partial\delta_r}{\partial t}=\frac{\delta_r\rho_L}{a_C^2\rho_C}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial t^2}.$$

6.8 C.c. in forma complessa e separazione delle variabili

Si definisce un potenziale complesso $\hat{\varphi}$ tale che $\tilde{\varphi}=\mathrm{Re}\{\hat{\varphi}\}$ con

$$\hat{\varphi}=S(s')\,N(n')\,e^{-\imath\omega' t}.$$

Considerando solo la parte reale delle equazioni, si effettuano le sostituzioni:

$$\cos x \to e^{\imath x},$$
$$\operatorname{sen} x \to -\imath e^{\imath x}$$

e risulta $\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial t^2} = -\omega'^2 \hat{\varphi}$; perciò, definendo

$$K_E = \frac{4\pi^2}{N_B^2} \cos^2 \beta \frac{\delta_T \rho_L}{a_C^2 \rho_C},$$

si ottengono i seguenti risultati.

Ingresso e uscita:

$$\hat{\varphi} = 0. \tag{6.18}$$

Pala completamente bagnata:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n'} = \varepsilon \frac{2\pi}{N_B} e^{\imath \Theta'} \left[r_H T^{s'} \left(\omega' \cos^2 \beta - \imath \omega' \operatorname{sen} \beta \cos \beta \right) - \imath T^{1-s'} \overline{u}_T \right] \tag{6.19}$$

Pala cavitante:

$$\begin{aligned} -\omega'^2 K_E r_H^2 T^{2s'} \exp\left(\frac{4\pi}{N_B} \operatorname{sen} \beta \cos \beta \right) \cos^2 \beta \, \hat{\varphi} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n'} = \\ \varepsilon \omega' \frac{2\pi}{N_B} r_H T^{s'} \exp\left(\frac{2\pi}{N_B} \operatorname{sen} \beta \cos \beta \right) \cos^2 \beta \, e^{\imath \Theta'} \left(1 - \imath \tan \beta \right) \\ - \imath \varepsilon T^{1-s'} \overline{u}_T e^{-\frac{\pi}{N_B} \operatorname{sen}(2\beta)} \frac{2\pi}{N_B} e^{\imath \Theta'}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

6.9 Separazione dell'equazione di campo

L'equazione di campo, dall'espressione (6.12) del laplaciano, è:

$$\begin{aligned} \nabla'^2 \hat{\varphi} = \frac{\cos^2 \beta}{r_H^2 T^{2s'} \exp\left(\frac{4\pi}{N_B} n' \operatorname{sen} \beta \cos \beta \right) (\log T)^2} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial s'^2} \\ + \frac{N_B^2}{r_H^2 T^{2s'} \exp\left(\frac{4\pi}{N_B} n' \operatorname{sen} \beta \cos \beta \right) 4\pi^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial n'^2} = 0. \end{aligned}$$

Sostituendovi l'espressione separata di $\hat{\varphi}$, si semplifica in

$$\frac{\cos^2 \beta}{(\log T)^2} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial s'^2} + \frac{N_B^2}{4\pi^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial n'^2} = 0$$

e diventa:

$$\frac{\cos^2 \beta}{(\log T)^2} \frac{S''}{S} + \frac{N_B^2}{4\pi^2 \cos^2 \beta} \frac{N''}{N} = 0$$

Ponendo

$$\Gamma^2 = \left(\frac{2\pi\cos^2\beta}{N_B\,\log T}\right)^2 > 0 :$$

si può riscrivere:

$$\Gamma^2\frac{S''}{S} + \frac{N''}{N} = 0$$

ovvero

$$\Gamma^2\frac{S''}{S} = -\frac{N''}{N} = -\nu^2,$$

da cui si ottengono due equazioni:

$$\begin{aligned} N'' - \nu^2 N &= 0, \\ \frac{S''}{S} &= -\frac{\nu^2}{\Gamma^2}. \end{aligned}$$

Con l'ulteriore posizione

$$\sigma^2 = -\frac{\nu^2}{\Gamma^2} \tag{6.21}$$

le due equazioni sono

$$\begin{aligned} N'' - \nu^2 N &= 0, \\ S'' - \sigma^2 S &= 0, \end{aligned}$$

e pertanto la soluzione generale per $\hat{\varphi}$ è:

$$\hat{\varphi} = \left[c_1\cosh(\sqrt{\sigma^2}s') + c_2\,\mathrm{senh}(\sqrt{\sigma^2}s')\right]\left[c_3\cosh(\sqrt{\nu^2}n') + c_4\,\mathrm{senh}(\sqrt{\nu^2}n')\right]\ e^{-\imath\omega' t}.$$

6.10 Problema agli autovalori per l'equazione in $S(s')$

Il problema è dato da

$$\begin{cases} S'' - \sigma^2 S = 0 \\ S(0) = 0 \\ S(1) = 0 \end{cases}$$

Le c.c. sono omogenee. Esso è un problema alla Sturm-Liouville con operatore autoaggiunto, tale che:

- gli autovalori σ_n^2 sono reali, non positivi, distinti;

- le autofunzioni sono ortogonali:

$$\int_0^1 S_h S_k ds' = 0, \quad h \neq k;\ h, k \in \mathbb{N}_0.$$

La soluzione generale è

$$S(s') = c_1 \cosh(\sqrt{\sigma^2} s') + c_2 \operatorname{senh}(\sqrt{\sigma^2} s').$$

Imponendo le c.c.:

- $S(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$;
- $S(1) = 0 \Rightarrow c_2 \operatorname{senh} \sqrt{\sigma^2} = 0$.

Oltre che per $\sigma^2 = 0$ (di nessun interesse), l'equazione è verificata se $\sigma^2 < 0$; posto allora $\sigma^2 = \imath^2 \sigma^{*2}$ si ha:

$$\operatorname{senh} \sqrt{\imath^2 \sigma^{*2}} = \operatorname{senh}(\imath \sqrt{\sigma^{*2}}) = \imath \operatorname{sen} \sqrt{\sigma^{*2}}.$$

La condizione per gli autovalori è

$$\sigma^* = m\pi,$$

e gli autovalori sono

$$\sigma^*_m = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.22}$$

Le autofunzioni sono semplici funzioni armoniche:

$$S_m(s') = \operatorname{sen}(m\pi s'), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

6.11 Soluzione del problema non omogeneo

Il problema completo è descritto da c.c. omogenee per S; non omogenee per N. Il problema omogeneo per S ha determinato gli autovalori σ^2_m, in base ai quali, e alla definizione/posizione (6.21), si possono ottenere i ν^2_m:

$$\nu^2_m = -\sigma^2_m \Gamma^2. \tag{6.23}$$

La soluzione generale del problema è costituita dalla soluzione generale per N, coi coefficienti incogniti ancòra da determinare, e dall'espansione modale in autofunzioni S_m (già determinate):

$$\hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \left[c_3 \cosh\left(\sqrt{\nu^2_m} n'\right) + c_4 \operatorname{senh}\left(\sqrt{\nu^2_m} n'\right) \right] \operatorname{sen}(m\pi s') \right\} e^{-\imath \omega' t}.$$

I coefficienti incogniti c_3 e c_4 si determinano imponendo le c.c. non omogenee per N e sfruttando l'ortogonalità delle autofunzioni S_m. Le condizioni al contorno sono:

- su $n' = 0$ [dalla (6.19)]:

$$c_4 \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\sqrt{\nu_m^2}\, \mathrm{sen}(m\pi s') \right] = \varepsilon \frac{2\pi}{N_B} e^{\imath\theta_j} T^{-\imath \tan\beta\, s'} \left[r_H T^{s'} (\omega' \cos^2\beta - \imath\omega' \,\mathrm{sen}\,\beta \cos\beta) - \imath T^{1-s'} \overline{u}_T \right];$$

- su $n' = 1$ [dalla (6.20)]:

$$\begin{aligned} &- \omega'^2 K_E r_H^2 T^{2s'} \exp\left(\frac{4\pi}{N_B} \mathrm{sen}\,\beta \cos\beta\right) \cos^2\beta \\ &\qquad \times \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\left(c_3 \cosh\sqrt{\nu_m^2} + c_4 \,\mathrm{senh}\sqrt{\nu_m^2} \right) \mathrm{sen}(m\pi s') \right] \\ &\quad + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\left(c_3 \sqrt{\nu_m^2}\,\mathrm{senh}\sqrt{\nu_m^2} + c_4 \sqrt{\nu_m^2}\cosh\sqrt{\nu_m^2} \right) \mathrm{sen}(m\pi s') \right] \\ &= \frac{2\pi}{N_B} \varepsilon \left[\omega' r_H T^{s'} e^{\frac{2\pi}{N_B}\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta} \cos^2\beta\,(1 - \imath\tan\beta) - \imath T^{1-s'} \overline{u}_T e^{-\frac{2\pi}{N_B}\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta} \right] \\ &\qquad \times e^{\imath\theta_j} e^{\imath\frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta} T^{-\imath\tan\beta s'}. \end{aligned}$$

Per usare le relazioni:

$$\int_0^1 S_m S_{\overline{m}} ds' = \int_0^1 \mathrm{sen}(m\pi s')\,\mathrm{sen}(\overline{m}\pi s')\, ds' = \begin{cases} 0, & \overline{m} \neq m \\ 0, & \overline{m} = m = 0 \\ 1/2, & \overline{m} = m \neq 0 \end{cases}$$

si moltiplica per $S_{\overline{m}} = \mathrm{sen}(\overline{m}\pi s')$ la prima c.c. ($\overline{m}$ è un indice generico) e si integra in $s' \in [0, 1]$. Volendo sfruttare questa equazione per determinare c_4, si osserva che essa perde di significato se si verifica almeno uno dei due casi: ($\overline{m} \neq m$), ($\overline{m} = m = 0$); l'ultimo dei quali non si presenta mai perché la sommatoria in m parte da 1. Resta da esaminare il caso ($\overline{m} = m \neq 0$), che si scrive:

$$\begin{aligned} &c_4 \sum_{m=1}^{+\infty} \sqrt{\nu_m^2} \int_0^1 \mathrm{sen}(m\pi s')\,\mathrm{sen}(\overline{m}\pi s')\, ds' = \\ &\quad \frac{2\varepsilon\pi}{N_B} e^{\imath\theta_j} \left[r_H (\omega' \cos^2\beta - \imath\omega' \,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta) \int_0^1 T^{s'(1-\imath\tan\beta)} \mathrm{sen}(\overline{m}\pi s')\, ds' \right. \\ &\qquad \left. - \imath\overline{u}_T \int_0^1 T^{1-s'(1+\imath\tan\beta)} \mathrm{sen}(\overline{m}\pi s')\, ds' \right]. \end{aligned}$$

Si ottengono dunque i coefficienti, per $m = 1, 2, \ldots$:

$$c_{4m} \frac{\sqrt{\nu_m^2}}{2} = \frac{2\pi\varepsilon}{N_B} e^{\imath\theta_j} \left[r_H \omega' e^{-\imath\beta} \cos\beta\, \mathcal{I}_{\overline{m}}^{(1)} - \imath\overline{u}_T \mathcal{I}_{\overline{m}}^{(2)} \right], \tag{6.24}$$

in cui gli integrali sono stati risolti in forma analitica e indicati con:

$$\mathcal{I}_{\overline{m}}^{(1)} = \frac{\overline{m}\pi - \overline{m}\pi T^B \cos(\overline{m}\pi) + BT^B \log T \operatorname{sen}(\overline{m}\pi)}{\overline{m}^2\pi^2 + B^2(\log T)^2},$$
$$\mathcal{I}_{\overline{m}}^{(2)} = \frac{T^{1-A}\left[\overline{m}\pi T^A - \overline{m}\pi \cos(\overline{m}\pi) - A \log T \operatorname{sen}(\overline{m}\pi)\right]}{\overline{m}^2\pi^2 + A^2(\log T)^2},$$
$$A = 1 + \imath \tan\beta,$$
$$B = 1 - \imath \tan\beta.$$

Similmente, per determinare c_3, si elabora la seconda c.c. (in cui ora c_4 è noto):

$$\begin{aligned}
&-\omega'^2 K_E r_H^2 e^{\frac{4\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\cos^2\beta \\
&\quad\times\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\left(c_3\cosh\sqrt{\nu_m^2} + c_4\operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2}\right)\int_0^1 T^{2s'}\operatorname{sen}(m\pi s')\operatorname{sen}(\overline{m}\pi s')\,ds'\right] \\
&+\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\left(c_3\sqrt{\nu_m^2}\operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2} + c_4\sqrt{\nu_m^2}\cosh\sqrt{\nu_m^2}\right)\int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi s')\operatorname{sen}(\overline{m}\pi s')\,ds'\right] \\
&\quad= \frac{2\pi\varepsilon\omega' r_H}{N_B} e^{\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\cos\beta\, e^{\imath(\theta_j-\beta)} e^{\imath\frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta}\int_0^1 T^{s'(1-\imath\tan\beta)}\operatorname{sen}(\overline{m}\pi s')\,ds' \\
&\qquad\qquad - \frac{2\pi\imath\varepsilon\overline{u}_T}{N_B} e^{-\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\int_0^1 T^{1-s'-\imath s'\tan\beta}\operatorname{sen}(\overline{m}\pi s')\,ds'.
\end{aligned}$$

Per sfruttare le relazioni di ortogonalità è necessario eliminare la dipendenza da s' della quantità $T^{2s'}$; pertanto la si approssima al valore che assume a metà pala per $s' = 1/2$ e quindi:

$$T^{2s'} \approx T.$$

Così è possibile continuare e scrivere:

$$\begin{aligned}
&-\omega'^2 K_E r_H^2 e^{\frac{4\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\cos^2\beta\frac{T}{2}\left(c_3\cosh\sqrt{\nu_m^2} + c_4\operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(c_3\sqrt{\nu_m^2}\operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2} + c_4\sqrt{\nu_m^2}\cosh\sqrt{\nu_m^2}\right) \\
&\quad= e^{\frac{\imath\pi}{N_B}\left(1+e^{-2\imath\beta}\right)}\left(1+e^{-2\imath\beta}\right)e^{\imath\theta_j}\frac{\pi\varepsilon\omega' r_H}{N_B}\mathcal{I}_{\overline{m}}^{(1)} - \frac{2\pi\imath\varepsilon\overline{u}_T}{N_B}e^{-\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\mathcal{I}_{\overline{m}}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Risolvendo per c_3 si ottiene, per $m = 1, 2, \ldots$:

$$c_{3m} = \frac{c_{4m}\mathcal{A}\mathcal{D}_m - c_{4m}\mathcal{F}_m + 2\mathcal{G}_j\mathcal{I}_{\overline{m}}^{(1)} - 2\mathcal{H}\mathcal{I}_{\overline{m}}^{(2)}}{\mathcal{E}_m - \mathcal{A}\mathcal{C}_m} \tag{6.25}$$

in cui:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \omega'^2 K_E r_H^2 T \exp\left(\frac{4\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta\right)\cos^2\beta,\\
\mathcal{C}_m &= \cosh\sqrt{\nu_m^2},\\
\mathcal{D}_m &= \operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2},\\
\mathcal{E}_m &= \sqrt{\nu_m^2}\operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2},\\
\mathcal{F}_m &= \sqrt{\nu_m^2}\cosh\sqrt{\nu_m^2},\\
\mathcal{G}_j &= e^{\frac{\iota\pi}{N_B}\left(1+e^{-2\iota\beta}\right)}\left(1+e^{-2\iota\beta}\right)e^{\iota\vartheta_j}\frac{\pi\varepsilon\omega' r_H}{N_B},\\
\mathcal{H} &= \frac{2\pi\iota\varepsilon\overline{u}_T}{N_B}e^{-\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta}.
\end{aligned}$$

Sviluppando parzialmente:

$$\begin{aligned}
c_{3m} = \Bigg(&\sqrt{\nu_m^2}\operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2} - \omega'^2 K_E r_H r_T e^{\frac{4\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\cos^2\beta\cosh\sqrt{\nu_m^2}\Bigg)^{-1}\\
&\times\Bigg\{c_{4m}\omega'^2 K_E r_H r_T\, e^{\frac{4\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\cos^2\beta\operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2}\\
&- c_{4m}\sqrt{\nu_m^2}\cosh\sqrt{\nu_m^2} + 2e^{\frac{\iota\pi}{N_B}\left(1+e^{-2\iota\beta}\right)}\left(1+e^{-2\iota\beta}\right)e^{\iota\vartheta_j}\frac{\pi\varepsilon\omega' r_H}{N_B}\\
&\times\frac{m\pi - m\pi\left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{(1-\iota\tan\beta)}\cos(m\pi) + (1-\iota\tan\beta)\left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{(1-\iota\tan\beta)}\log\frac{r_T}{r_H}\operatorname{sen}(m\pi)}{m^2\pi^2 + (1-\iota\tan\beta)^2(\log\frac{r_T}{r_H})^2}\\
&- \frac{4\pi\iota\varepsilon\overline{u}_T}{N_B}e^{-\frac{2\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta}\left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{1-(1+\iota\tan\beta)}\\
&\times\frac{\left[m\pi\left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{(1+\iota\tan\beta)} - m\pi\cos(m\pi) - (1+\iota\tan\beta)\log\frac{r_T}{r_H}\operatorname{sen}(m\pi)\right]}{m^2\pi^2 + (1+\iota\tan\beta)^2(\log\frac{r_T}{r_H})^2}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Sviluppando completamente il denominatore e uguagliandolo a zero, vengono determinate le seguenti *frequenze proprie immaginarie*, che non avranno riscontro visibile nelle forze:

$$\omega' = \pm\iota\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi\operatorname{sen}(2\beta)}{N_B}}\pi\sqrt{m}\sqrt{\tan\frac{2m\pi^2\cos^2\beta}{N_B\log\frac{r_T}{r_H}}}}{\sqrt{K_E N_B r_H r_T\log\frac{r_T}{r_H}}}.$$

Questo comportamento è simile a quello osservato nel potenziale $\hat{\varphi}_H$ dell'induttore assiale. *Sembra dunque che i potenziali cinetici associati all'eccitazione introdotta dalle pale non posseggano frequenze reali proprie e risonanze.*

CAPITOLO 7

Calcolo delle superfici e delle forze

"Mans life is but a jest,
A dream, a shadow, bubble, air, a
vapor at the best."
— *George Walter Thornbury,* The Jesters Sermon

7.1 Proiezione della superficie su direzioni "radiale" e "tangenziale"

7.1.1 Espressione di $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\mathrm{B}$ in coordinate $\mathrm{r}^*, \theta^*, z^*$

Il vettore posizione di un punto generico della superficie delle pale ("B") sia:

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = \mathrm{r}^* \boldsymbol{e}_{\mathrm{r}^*}(\theta^*) + z^* \boldsymbol{e}_{z^*}$$

e il suo elemento di superficie differenziale sia:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\mathrm{B} = \frac{\partial \boldsymbol{x}_\mathrm{B}}{\partial \theta^*} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}_\mathrm{B}}{\partial z^*} \mathrm{d}\theta^* \mathrm{d}z^*.$$

Dall'equazione della j−sima pala (6.15) si ottiene

$$\mathrm{r}^* = \mathrm{r}_\mathrm{H} e^{-\frac{\theta^* - \theta_\mathrm{j}}{\tan \beta}},$$

perciò:

$$\boldsymbol{x}_B(\theta^*, z^*) = r_H e^{-\frac{\theta^*-\theta_j}{\tan\beta}} \boldsymbol{e}_{r^*}(\theta^*) + z^* \boldsymbol{e}_{z^*},$$
$$d\boldsymbol{S}_B = \pm \left[\frac{r_H}{\tan\beta} e^{-\frac{\theta^*-\theta_j}{\tan\beta}} \boldsymbol{e}_{\theta^*} + r_H e^{-\frac{\theta^*-\theta_j}{\tan\beta}} \boldsymbol{e}_{r^*} \right] d\theta^* dz^*.$$

Il segno + vale per il lato in pressione della pala ($n^* = 0$) viceversa il segno − vale per il lato in aspirazione ($n^* = 1$).

7.1.2 Proiezione sui versori "radiale" e "tangenziale"

Con riferimento agli angoli descritti nella figura 3.2 a pag. 56:

$$d\boldsymbol{S}_B \cdot \boldsymbol{e}_R = \pm \left[-\frac{r_H}{\tan\beta} e^{-\frac{\theta^*-\theta_j}{\tan\beta}} \operatorname{sen}\theta_{Rr^*} + r_H e^{-\frac{\theta^*-\theta_j}{\tan\beta}} \cos\theta_{Rr^*} \right] d\theta^* dz^*, \tag{7.1}$$
$$d\boldsymbol{S}_B \cdot \boldsymbol{e}_T = \pm \left[+\frac{r_H}{\tan\beta} e^{-\frac{\theta^*-\theta_j}{\tan\beta}} \cos\theta_{Rr^*} + r_H e^{-\frac{\theta^*-\theta_j}{\tan\beta}} \operatorname{sen}\theta_{Rr^*} \right] d\theta^* dz^*. \tag{7.2}$$

7.1.3 Trasformazione di coordinate

È necessario trasformare le coordinate cilindriche in coordinate a spirale sulla superficie delle pale. Dalle trasformazioni di pag. 93 si ottiene lo jacobiano:

$$J_{pala} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial\theta^*}{\partial s^*} & \frac{\partial\theta^*}{\partial z^*} \\ \frac{\partial z^*}{\partial s^*} & \frac{\partial z^*}{\partial z^*} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\log T \tan\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = -\log T \tan\beta$$

da cui

$$d\theta^* dz^* = |J| ds^* dz^* = \log T \tan\beta \, ds^* dz^*.$$

Trasformando anche θ_{Rr^*} nelle nuove coordinate:

$$\theta_{Rr^*} = \theta_j + \frac{2\pi}{N_B} n^* \cos^2\beta - s^* \log T \tan\beta - \omega' t,$$

e con le posizioni, fatte per semplicità di scrittura:

$$X_0^* = \theta_{Rr^*}|_{n^*=0} = -\omega' t + \theta_j - s^* \log T \tan\beta,$$
$$X_1^* = \theta_{Rr^*}|_{n^*=1} = -\omega' t + \theta_j - s^* \log T \tan\beta + \frac{2\pi}{N_B} \cos^2\beta,$$

è possibile scrivere le proiezioni come

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{S}_{B,j,0} \cdot \boldsymbol{e}_R &= +r_H T^{s'} (-\operatorname{sen} X_0 + \tan\beta \cos X_0) \log T ds' dz', \\
d\boldsymbol{S}_{B,j,0} \cdot \boldsymbol{e}_T &= +r_H T^{s'} (\cos X_0 + \tan\beta \operatorname{sen} X_0) \log T ds' dz', \\
d\boldsymbol{S}_{B,j,1} \cdot \boldsymbol{e}_R &= -r_H T^{s'} e^{-\frac{2\pi}{N_B}\frac{\cos^3\beta}{\operatorname{sen}\beta}} (-\operatorname{sen} X_1 + \tan\beta \cos X_1) \log T ds' dz', \\
d\boldsymbol{S}_{B,j,1} \cdot \boldsymbol{e}_T &= -r_H T^{s'} e^{-\frac{2\pi}{N_B}\frac{\cos^3\beta}{\operatorname{sen}\beta}} (\cos X_1 + \tan\beta \operatorname{sen} X_1) \log T ds' dz'.
\end{aligned}$$

Con quest'ultima scrittura s'è anche approssimato:

$$s^* \approx s',$$
$$n^* \approx n',$$
$$z^* \approx z'$$

e quindi pure

$$X_0^* \approx X_0, \quad X_1^* \approx X_1.$$

7.2 Forze

La pressione va valutata nella posizione perturbata ($\varepsilon \neq 0$), tuttavia può essere espressa in coordinate imperturbate (s', n', z') in quanto, con errore del solo secondo ordine, l'integrazione è effettuata nella posizione imperturbata. La pressione si approssima con:

$$p \approx (\overline{p} + \tilde{p})_{\varepsilon=0} + \left.\frac{d\overline{p}}{dr'}\right|_{\varepsilon=0} (r' - r'|_{\varepsilon=0}),$$

in cui

- $(r' - r'|_{\varepsilon=0})$ è la proiezione del vettore eccentricità $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\ \boldsymbol{e}_R$ su $\boldsymbol{e}_{r'}$, e va espresso in (s', n', z'):

  $$(r' - r'|_{\varepsilon=0}) = \varepsilon\ \boldsymbol{e}_{r'} \cdot \boldsymbol{e}_R;$$

  dove l'angolo Φ' compreso tra $\boldsymbol{e}_{r'}$ e $\boldsymbol{e}_R$ vale

  $$\Phi' = \theta - \omega t$$

  ovvero

  $$\Phi' = \theta' - \omega' t,$$
  $$\Phi' = \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta - 2\pi s' + \theta_j - \omega' t.$$

- le forze di pressione dovute al **flusso medio** sono contenute nel termine

  $$\overline{p}|_{\varepsilon=0} + \left.\frac{d\overline{p}}{dr'}\right|_{\varepsilon=0} \varepsilon \boldsymbol{e}_{r'} \cdot \boldsymbol{e}_R;$$

- le **forze rotodinamiche** sono nel termine

  $$\tilde{p}|_{\varepsilon=0} = -\rho_L \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} - \rho_L \overline{\boldsymbol{u}}' \cdot \nabla \tilde{\varphi}.$$

Il potenziale del flusso è legato esclusivamente all'eccitazione introdotta dalle pale. Si ha:

$$\hat{\varphi} = e^{-\imath\omega' t} \sum_{m=1}^{+\infty} S_m(s')\, N_m(n')$$

Infine il vettore della forza esercitata sull'induttore (I), che consta soltanto delle due superfici contrapposte delle due pale $S_{B,j,0}$ e $S_{B,j,1}$, vale:

$$\mathbf{F}^{(I,j)} = -\int_{S_{B,j,0}} p\, d\mathbf{S}_{B,j,0} - \int_{S_{B,j,1}} p\, d\mathbf{S}_{B,j,1},$$

mentre la forza complessiva su tutte le pale ammonta a:

$$\mathbf{F}^{(I)} = \sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{F}^{(I,j)}.$$

Di questa se ne calcoleranno le componenti "radiale" e "tangenziale".

7.3 Forze agenti sulle pale

Sulle pale si calcolano esclusivamente le forze di perturbazione introdotte nel flusso dalle pale stesse.

La forza totale *per unità di lunghezza (profondità z')* sia:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathrm{Re}\left\{ \sum_{j=1}^{N_B} \hat{\mathbf{F}}^{(j)} \right\} \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{F}}^{(j)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbf{F}_m^{(j)},$$

con le forze di pressione direttamente legate al potenziale:

$$\hat{\mathbf{F}}_m^{(j)} = -\int_{S_{Bj0}} \hat{p}_m d\mathbf{S} - \int_{S_{Bj1}} \hat{p}_m d\mathbf{S},$$
$$\hat{\varphi}_m = N_m(n')\, S_m(s')\, e^{-\imath\omega' t},$$
$$\hat{p}_m = -\rho_L \frac{\partial \hat{\varphi}_m}{\partial t} - \rho_L \overline{\mathbf{u}}' \cdot \nabla \hat{\varphi}_m.$$

Richiamando i precedenti risultati (6.13) e (6.14), la pressione della m–sima armonica risulta dunque:

$$\hat{p}_m = \rho_L \imath\omega' N(n')\, S(s')\, e^{-\imath\omega' t} - \frac{\rho_L \overline{u}_T}{r_H \log T} T^{1-2s'} e^{-\frac{4\pi}{N_B} n' \,\mathrm{sen}\,\beta \cos\beta} N(n')\, S'(s')\, e^{-\imath\omega' t}.$$

e dunque per le forze si può scrivere:

$$\hat{\mathbf{F}}_m^{(j)} = -\int_0^1 \left[\rho_L \imath\omega' N_m(0)\, S_m(s')\, e^{-\imath\omega' t} - \frac{\rho_L \overline{u}_T}{r_H \log T} T^{1-2s'} N_m(0)\, S'_m(s')\, e^{-\imath\omega' t}\right] \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_R(-\operatorname{sen} X_0 + \tan\beta \cos X_0) \\ \boldsymbol{e}_T(\cos X_0 + \tan\beta \operatorname{sen} X_0) \end{pmatrix} T^{s'} r_H \log T\, ds'$$

$$+\int_0^1 \left[\rho_L \imath\omega' N_m(1)\, S_m(s')\, e^{-\imath\omega' t} - \frac{\rho_L \overline{u}_T}{r_H \log T} T^{1-2s'} e^{-\frac{4\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta} N_m(1)\, S'_m(s')\, e^{-\imath\omega' t}\right] \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_R(-\operatorname{sen} X_1 + \tan\beta \cos X_1) \\ \boldsymbol{e}_T(\cos X_1 + \tan\beta \operatorname{sen} X_1) \end{pmatrix} T^{s'} r_H \log T\, e^{-\frac{2\pi}{N_B}\frac{\cos^3\beta}{\operatorname{sen}\beta}}\, ds',$$

in cui si sono considerate le componenti "radiale" e "tangenziale" della forza, scritte come:

$$\hat{\mathbf{F}}_m^{(j)} = \begin{pmatrix} \hat{f}_{Rm}^{(j)} \\ \hat{f}_{Tm}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori vengono calcolati a partire dalle relazioni (6.22) e (6.23) per cui, insieme a relazioni che legano le funzioni trigonometriche a quelle iperboliche, si può scrivere:

$$\sqrt{\nu_m^2} = \imath\sqrt{\sigma^{*2}\Gamma^2} = \imath\frac{2m\pi^2\cos^2\beta}{N_B \log T},$$
$$\operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2} = \imath \operatorname{sen}(\sigma^*\Gamma),$$
$$\cosh\sqrt{\nu_m^2} = \cos(\sigma^*\Gamma),$$
$$\sqrt{\nu_m^2}\operatorname{senh}\sqrt{\nu_m^2} = -\sigma^*\Gamma \operatorname{sen}(\sigma^*\Gamma),$$
$$\sqrt{\nu_m^2}\cosh\sqrt{\nu_m^2} = \imath\sigma^*\Gamma\cos(\sigma^*\Gamma).$$

Queste relazioni permettono di riscrivere anche le espressioni (6.24) e (6.25) dei coefficienti c_4 e c_3.

7.3.1 Componente "radiale"

La componente "radiale" è:

$$f_{Rm}^{(j)} = -\int_0^1 \rho_L \imath\omega' N_m(0) S_m(s')\, e^{-\imath\omega' t} r_H T^{s'} \log T(-\operatorname{sen} X_0 + \tan\beta\cos X_0)\, ds'$$
$$+\int_0^1 \rho_L \overline{u}_T T^{1-s'} N_m(0) S'_m(s')\, e^{-\imath\omega' t}(-\operatorname{sen} X_0 + \tan\beta\cos X_0)\, ds'$$
$$+\int_0^1 \rho_L \imath\omega' N_m(1) S_m(s')\, e^{-\imath\omega' t} r_H T^{s'} e^{-\frac{2\pi}{N_B}\frac{\cos^3\beta}{\operatorname{sen}\beta}}(-\operatorname{sen} X_1 + \tan\beta\cos X_1)\log T ds'$$
$$-\int_0^1 \rho_L \overline{u}_T T^{1-s'} e^{-\frac{4\pi}{N_B}\operatorname{sen}\beta\cos\beta} N_m(1) S'_m(s')\, e^{-\imath\omega' t} e^{-\frac{2\pi}{N_B}\frac{\cos^3\beta}{\operatorname{sen}\beta}}(-\operatorname{sen} X_1 + \tan\beta\cos X_1)\, ds',$$

in cui

$$N_m(0) = c_{3m},$$
$$N_m(1) = c_{3m}\cosh\sqrt{\nu_m^2} + c_{4m}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{\nu_m^2}.$$

Di questa componente si calcola la media temporale della componente "radiale" su un periodo $T = 2\pi/\omega'$, ricordando le dipendenze dal tempo e da s' insite in X_0 e X_1:

$$\begin{aligned}
\underline{f}_{Rm}^{(j)} = &-\rho_L \imath\omega' N_m(0) r_H \log T \int_0^1 \Big\{ \mathrm{sen}(m\pi s') T^{s'} \\
&\times \frac{\omega'}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega'}} e^{-\imath\omega' t} \left[-\mathrm{sen}(\theta_j - s' \log T \tan\beta - \omega' t) \right. \\
&\left. + \tan\beta \cos(\theta_j - s' \log T \tan\beta - \omega' t) \right] dt \Big\} ds' \\
&+ \rho_L \overline{u}_T N_m(0) m\pi \int_0^1 \Big\{ T^{1-s'} \cos(m\pi s') \\
&\times \frac{\omega'}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega'}} e^{-\imath\omega' t} \left[-\mathrm{sen}(\theta_j - s' \log T \tan\beta - \omega' t) \right. \\
&\left. + \tan\beta \cos(\theta_j - s' \log T \tan\beta - \omega' t) \right] dt \Big\} ds' \\
&+ \rho_L \imath\omega' N_m(1) r_H \log T e^{-\frac{2\pi}{N_B}\frac{\cos^3\beta}{\mathrm{sen}\,\beta}} \\
&\times \int_0^1 \Big\{ \mathrm{sen}(m\pi s') T^{s'} \frac{\omega'}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega'}} e^{-\imath\omega' t} \\
&\times \left[-\mathrm{sen}(\theta_j - s' \log T \tan\beta - \omega' t + \frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta) \right. \\
&\left. + \tan\beta \cos(\theta_j - s' \log T \tan\beta - \omega' t + \frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta) \right] dt \Big\} ds' \\
&- \rho_L \overline{u}_T N_m(1)\, e^{\frac{\pi}{2N_B}\frac{\cos(3\beta) - 5\cos\beta}{\mathrm{sen}\,\beta}} m\pi \\
\times \int_0^1 \Bigg\{ T^{1-s'} \cos(m\pi s') \frac{\omega'}{2\pi} &\int_0^{\frac{2\pi}{\omega'}} e^{-\imath\omega' t} \left[-\mathrm{sen}\left(\theta_j - s' \log T \tan\beta - \omega' t \frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta\right) \right. \\
&\left. + \tan\beta \cos\left(\theta_j - s' \log T \tan\beta - \omega' t \frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta\right) \right] dt \Bigg\} ds'.
\end{aligned}$$

Risolvendo gli integrali temporali si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\underline{f}_{Rm}^{(j)} = &-\rho_L \imath\omega' N_m(0) r_H \log T \int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi s') T^{s'} \\
&\times \frac{1}{2}\sec\beta\,[-\imath\cos(\beta-\theta_j+s'\log T\tan\beta)+\operatorname{sen}(\beta-\theta_j+s'\log T\tan\beta)]\,ds' \\
&\qquad + \rho_L \overline{u}_T N_m(0) m\pi \int_0^1 T^{1-s'}\cos(m\pi s') \\
&\times \frac{1}{2}\sec\beta\,[-\imath\cos(\beta-\theta_j+s'\log T\tan\beta)+\operatorname{sen}(\beta-\theta_j+s'\log T\tan\beta)]\,ds' \\
&\qquad + \rho_L \imath\omega' N_m(1) r_H \log T e^{-\frac{2\pi}{N_B}\frac{\cos^3\beta}{\operatorname{sen}\beta}} \int_0^1 T^{s'}\operatorname{sen}(m\pi s') \\
&\qquad \times \frac{1}{2}\sec\beta\left[-\imath\cos(\beta-\theta_j+s'\log T\tan\beta-\frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta)\right. \\
&\qquad\quad \left. + \operatorname{sen}(\beta-\theta_j+s'\log T\tan\beta-\frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta)\right]ds' \\
&\qquad - \rho_L \overline{u}_T N_m(1)\, e^{\frac{\pi}{2N_B}\frac{\cos(3\beta)-5\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}} m\pi \int_0^1 T^{1-s'}\cos(m\pi s') \\
&\qquad \times \frac{1}{2}\sec\beta\left[-\imath\cos(\beta-\theta_j+s'\log T\tan\beta-\frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \operatorname{sen}(\beta-\theta_j+s'\log T\tan\beta-\frac{2\pi}{N_B}\cos^2\beta)\right]ds'.
\end{aligned}
$$

Infine, risolvendo anche gli integrali in s' e riordinando, ponendo anche

$$b = \exp(2\imath\beta),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\underline{f}^{(j)}_{Rm} &= e^{-\imath\theta_j} e^{-\imath m\pi} b \\
&\quad \times \left\{ (1+b) m\pi \left[-2e^{\imath m\pi} + \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{\frac{2b}{1+b}} + e^{2\imath m\pi} \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{\frac{2b}{1+b}} \right] \right. \\
&\quad \left. + 2\imath b \left(-1 + e^{2\imath m\pi}\right) \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{\frac{2b}{1+b}} \log \frac{r_T}{r_H} \right\} \\
&\quad \times \left[(1+b) m\pi - 2\imath b \log \frac{r_T}{r_H} \right]^{-1} \left[-\imath (1+b) m\pi + 2b \log \frac{r_T}{r_H} \right]^{-1} \\
&\quad \times \rho_L \imath \omega' r_H \frac{\log \frac{r_T}{r_H}}{2} \left[-N_m(0) + N_m(1) e^{-\frac{2\pi\imath}{N_B} \cos^2 \beta} e^{-\frac{2\pi}{N_B} \frac{\cos^3 \beta}{\operatorname{sen} \beta}} \right] + e^{-\imath\theta_j} e^{-\imath m\pi} b \\
&\quad \times \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{\frac{b-1}{b+1}} \left\{ \left(1 - e^{2\imath m\pi}\right) (1+b) m\pi + 2\imath \left[1 + e^{2\imath m\pi} - 2e^{\imath m\pi} \left(\frac{r_T}{r_H}\right)^{\frac{2}{1+b}} \right] \log \frac{r_T}{r_H} \right\} \\
&\quad \times \left[(1+b)^2 m^2 \pi^2 + 4 \left(\log \frac{r_T}{r_H} \right)^2 \right]^{-1} \rho_L \overline{u}_T \frac{m\pi}{2} \\
&\quad \times \left[N_m(0) - N_m(1)\, e^{\frac{\pi}{2N_B} \frac{\cos(3\beta) - 5\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}} e^{-\frac{2\pi\imath}{N_B} \cos^2 \beta} \right].
\end{aligned}$$

Di questi due grandi addendi, il primo darà contributo parabolico in ω/Ω, mentre il secondo lo darà lineare.

7.3.2 Componente "tangenziale"

Osservando le proiezioni radiale e tangenziale delle superfici (7.1) e (7.2), si annota che, una volta trasformatele in forma complessa secondo la procedura già usata a pag. 99, esiste la seguente relazione tra le due:

$$\frac{\widehat{dS_B \cdot e_R}}{\widehat{dS_B \cdot e_T}} = \imath$$

e pertanto lo stesso rapporto esisterà tra le corrispondenti componenti della forza:

$$\hat{f}^{(j)}_{Rm} = \imath \hat{f}^{(j)}_{Tm}.$$

CAPITOLO 8

Risultati e discussione

"as by proof, we see
the waters swell before a boisterous storm."
— *William Shakespeare,* Richard III

8.1 Esame dei grafici

8.1.1 Adimensionalizzazione

Per ottenere grafici della forza in funzione del rapporto ω/Ω si osserva innanzitutto che le formule precedenti sono esplicitate in funzione di $\omega' = \omega - \Omega$.

La velocità radiale all'uscita $\overline{u}_T$ viene espressa in funzione del coefficiente di flusso definito in (6.1):

$$\overline{u}_T = \phi \Omega r_T.$$

Per confrontare i risultati col lavoro di Jery (1987), le forze vengono adimensionalizzate tramite:

$$\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon,$$

ma si osservi che i calcoli producono forze per unità di profondità per cui l'effettiva adimensionalizzazione, detta b la larghezza della girante, risulta

$$\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b.$$

Viceversa, l'adimensionalizzazione per il confronto con i dati di Franz (1989) è:

$$\frac{1}{2}\rho_L r_T^3 \Omega^2 \pi \varepsilon.$$

8.1.2 Scelta dei valori di riferimento

Le previsioni del presente modello vengono confrontate con gli esperimenti condotti con l'induttore descritto nella tabella A.4 a pag. 141.

Le figure 8.7 ed il suo corrispettivo sperimentale 1.2 mostrano quanto poco cambi tra un regime cavitante e uno completamente bagnato: ciò è rispecchiato dai risultati dei calcoli (fig. 8.6). Si osservi poi che le condizioni sperimentali di Franz sono più lontane da quelle riprodotte nei calcoli presenti, per la presenza di una voluta attorno alla girante. Questi sono i motivi per scegliere gli esperimenti di Jery — che, pure, sono condotti senza cavitazione —anziché quelli di Franz come riferimento principale per confrontare le previsioni teoriche di questa tesi. Anche Guinzburg (1992) usa in regime non cavitante lo stesso induttore impiegato da Jery e da Franz.

8.1.3 Confronto coi valori sperimentali

In questo modello, l'entità della cavitazione è regolata dal parametro adimensionale $\mathcal{E}$, definito a partire da K_E esattamente come precedentemente s'è usato $\mathcal{C}$ a partire da K_C:

$$\mathcal{E} = K_E \Omega^2.$$

La figura 8.1 mostra i risultati dei calcoli eseguiti con gli stessi valori sperimentali riportati nella figura 1.1.

La figura 8.3 mostra la variabilità delle forze con Ω; essa è pressoché nulla, similmente a quanto accade sperimentalmente (fig. 8.2).

La figura 8.5 mostra la variabilità delle forze con ϕ; il confronto va fatto colla figura 8.4.

Una previsione delle modifiche delle forze rotodinamiche cui si andrebbe incontro modificando il numero delle pale N_B è riportata nella figura 8.8. Il suggerimento proveniente da questi calcoli è che aumentando il numero delle pale diminuiscono le forze rotodinamiche. Si osservi che il sistema di coordinate a spirale usato descrive meglio una girante centrifuga se N_B aumenta.

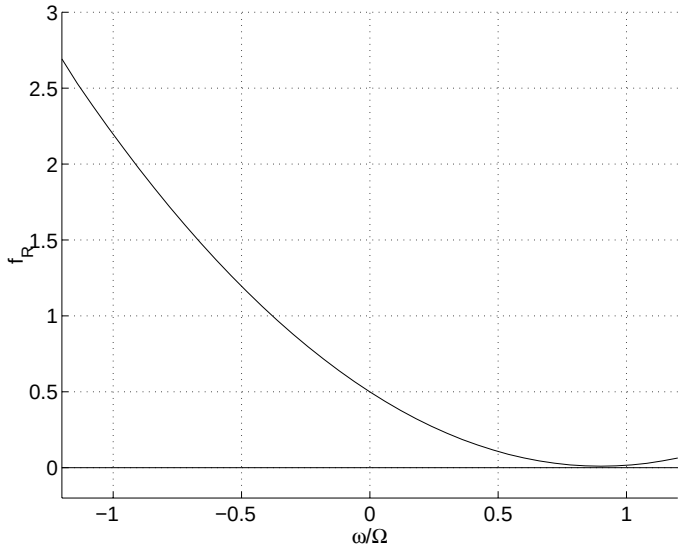
Nelle figure 8.9, 8.10, 8.11, sono riportate le previsioni delle modifiche delle forze rotodinamiche cui si andrebbe incontro modificando β. Si osservi che il sistema di coordinate a spirale usato descrive meglio una girante centrifuga se $|\beta|$ diminuisce. In particolare, la figura 8.11 illustra alcuni valori di β per i quali si prevedono forze negative intense. Ad esempio, per il valore indicato di $\beta = 14.1°$, si avrebbe un rotore con forze rotodinamiche molto negative su tutte le frequenze.

Nella figura 8.12 è riportata una previsione delle modifiche delle forze rotodinamiche al variare di $1/T = r_H/r_T$. Il sistema di coordinate a spirale usato descrive meglio una girante centrifuga se $1/T$ tende a uno, caratterizzando pale corte. Secondo la previsione, con pale molto corte non si hanno più forze rotodinamiche positive;

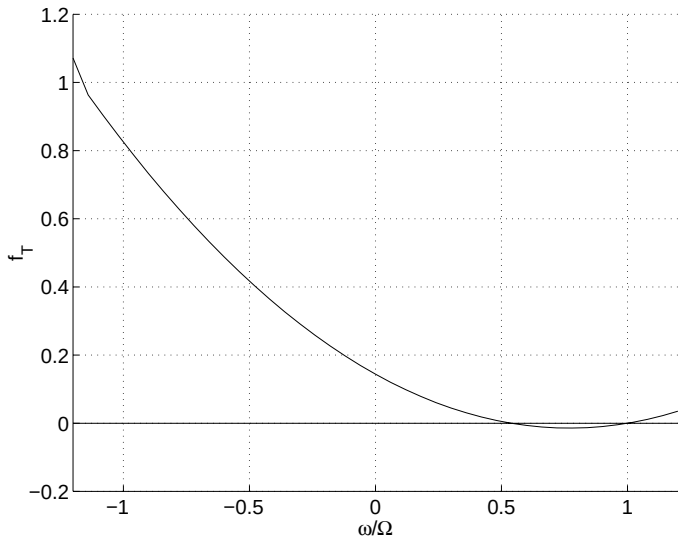
per i valori ivi indicati, le forze negative sono più intense per $r_H/r_T \approx 0.65$. Tuttavia, pale molto corte non hanno molto senso in giranti centrifughe.

La figura 8.13 mostra un confronto diretto tra le previsioni del modello e le forze misurate da Jery, queste ultime divise per 6. Il riscontro qualitativo è notevole.

Le forze rotodinamiche in gioco presentano un aspetto molto simile a quelle



(a) forza radiale



(b) forza tangenziale

Figura 8.1: Risultati dei calcoli con $\Omega = 2000$ rpm, $N_B = 5$, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$.

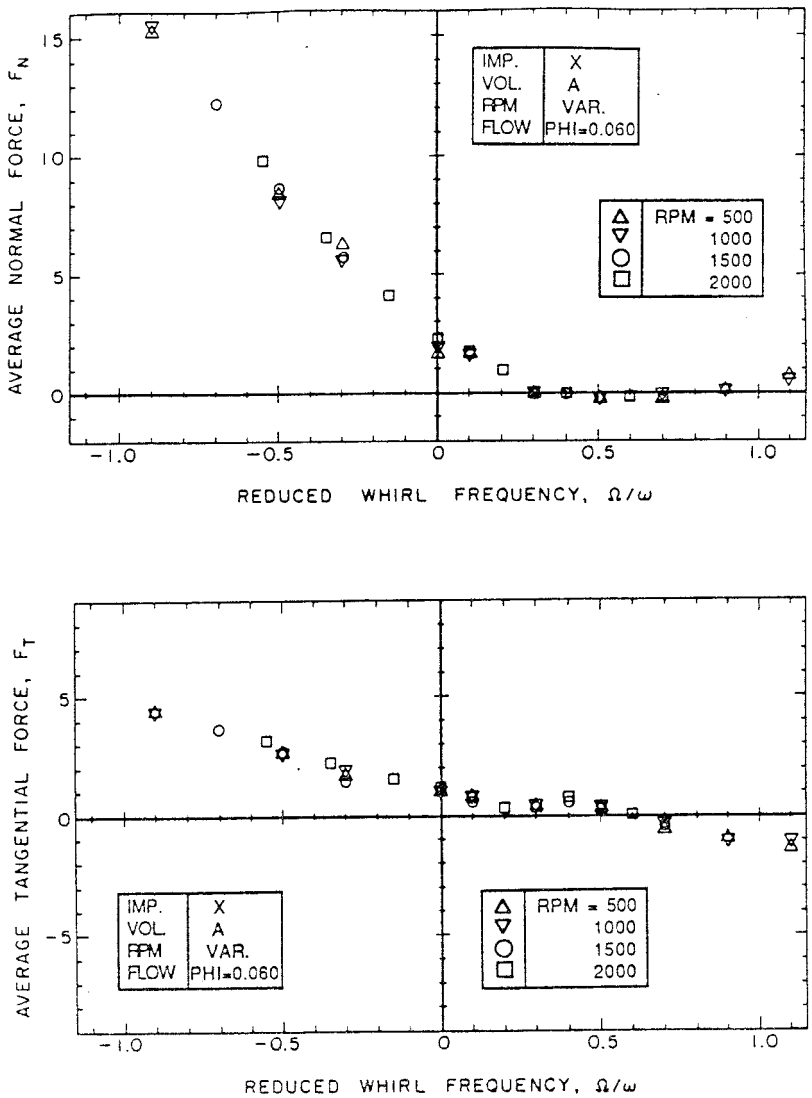
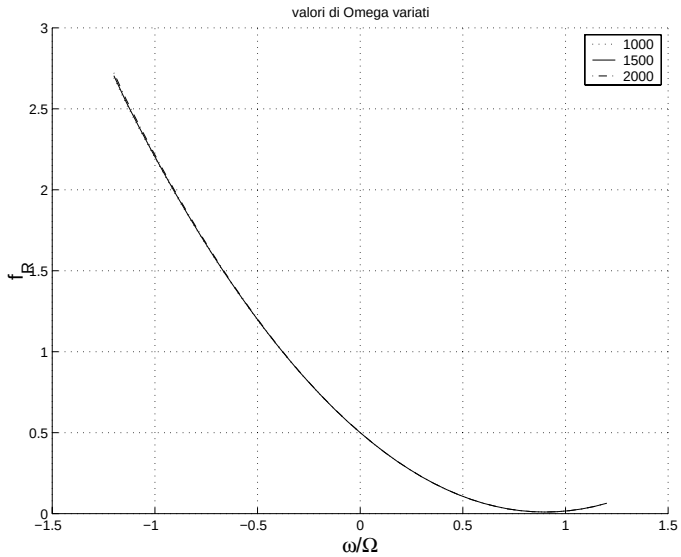
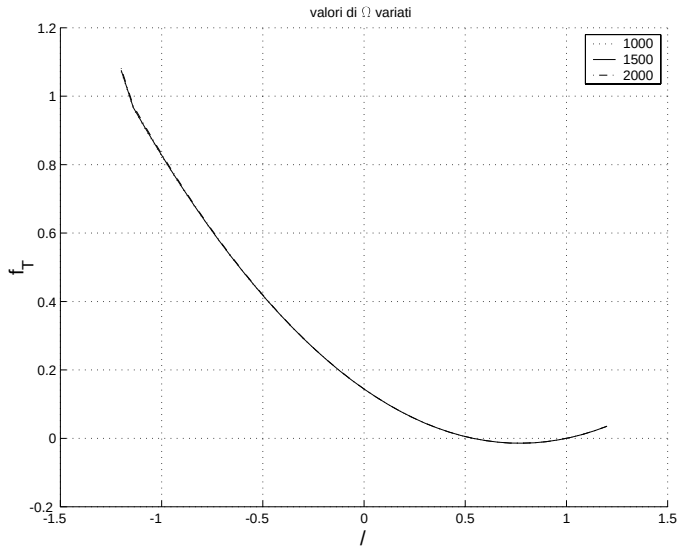


Figura 8.2: Forze radiale e tangenziale dell'induttore X dotato di voluta (Jery, 1987) — I valori alle diverse velocità di rotazione sono pressoché indistinguibili

dovute, nel caso dell'induttore assiale, alla sola eccitazione delle pale; a proposito si osservi di nuovo la figura 5.5. Una ulteriore conferma che allontanamenti dal comportamento parabolico delle forze rotodinamiche si verificano solo quando il mozzo è presente viene da Hiwata e Tsujimoto (2002).



(a) forza radiale



(b) forza tangenziale

Figura 8.3: Risultati dei calcoli con Ω variabile nelle stesse condizioni della figura 8.2; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$.

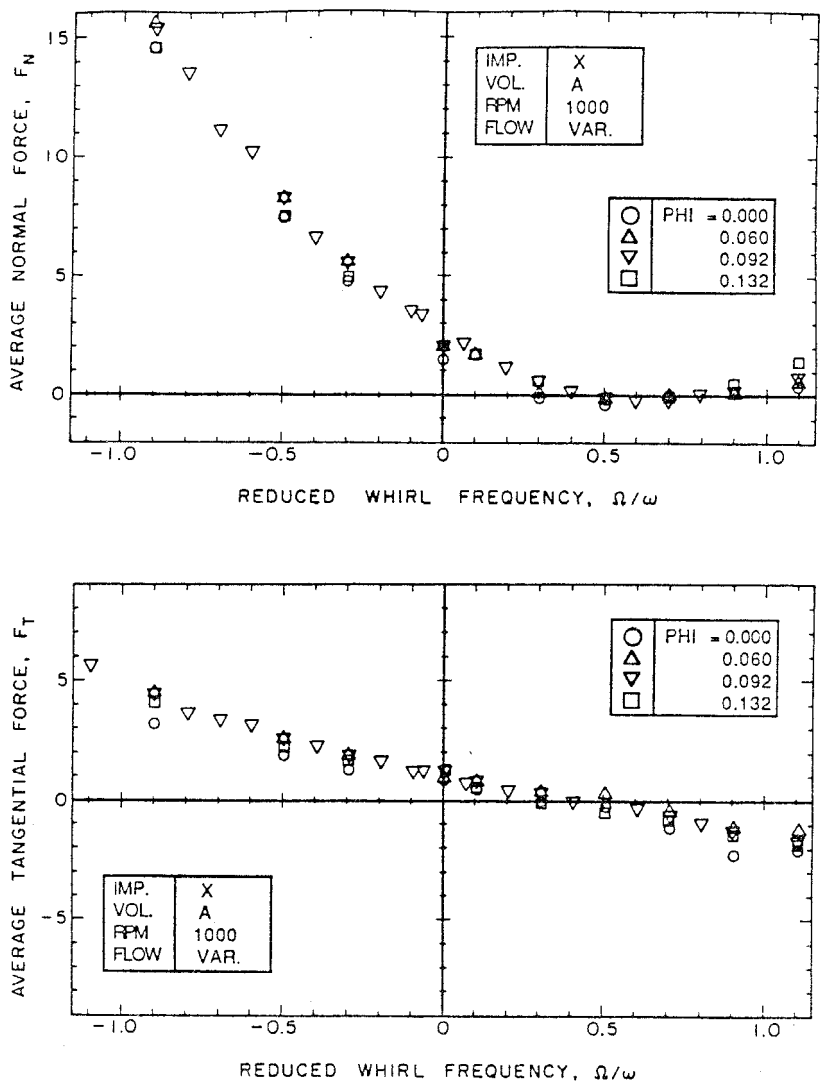
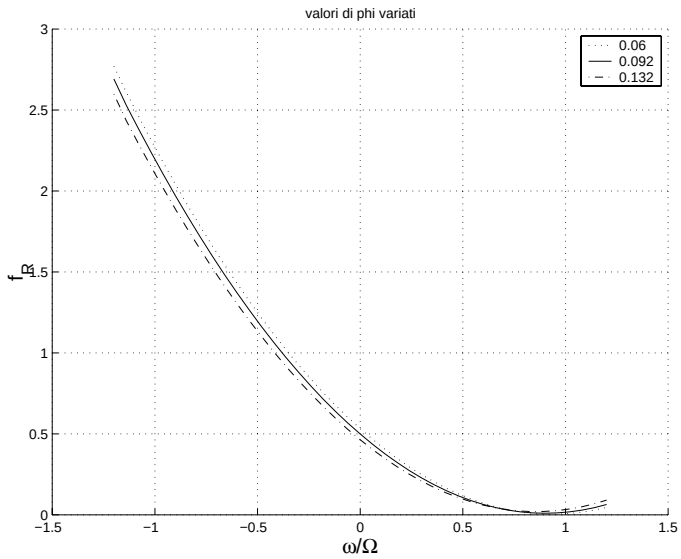
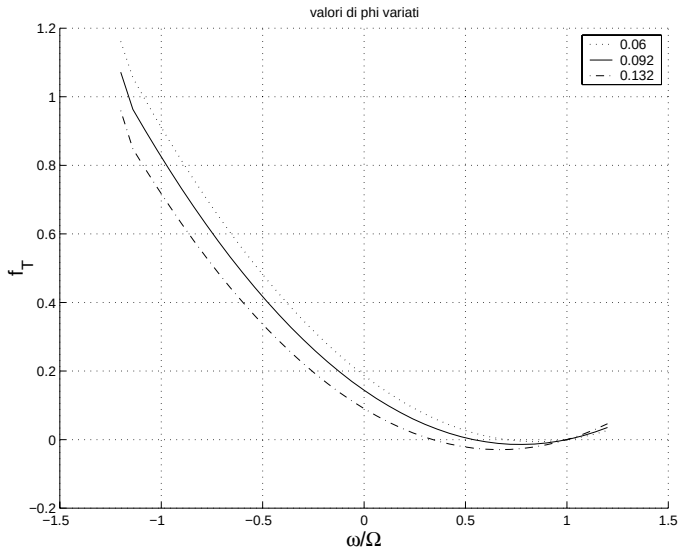


Figura 8.4: Forze radiale e tangenziale dell'induttore X dotato di voluta (Jery, 1987) — I valori ai diversi coefficienti di flusso sono pressoché indistinguibili

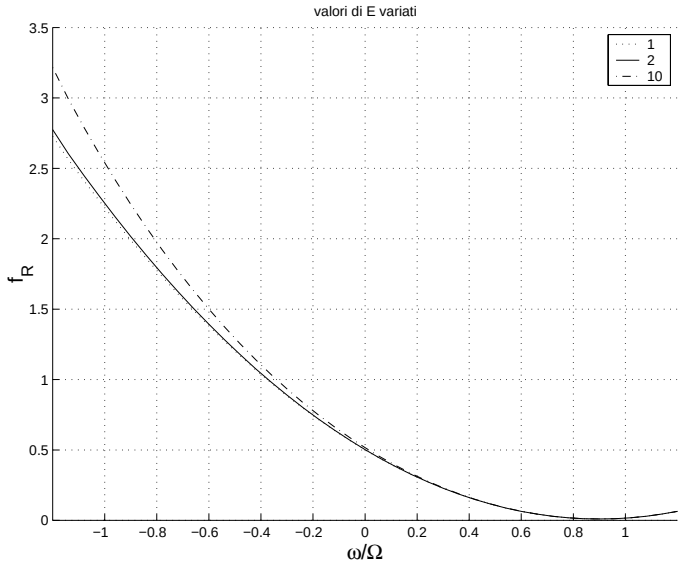


(a) forza radiale

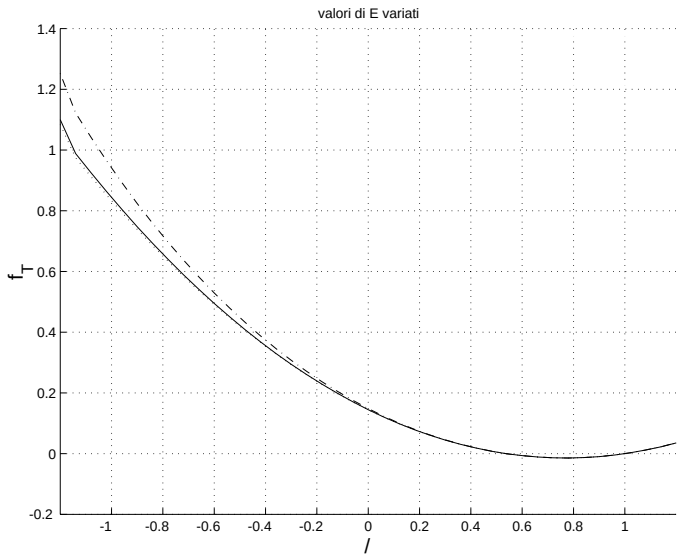


(b) forza tangenziale

Figura 8.5: Risultati dei calcoli con Ω variabile nelle stesse condizioni della figura 8.4; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$.

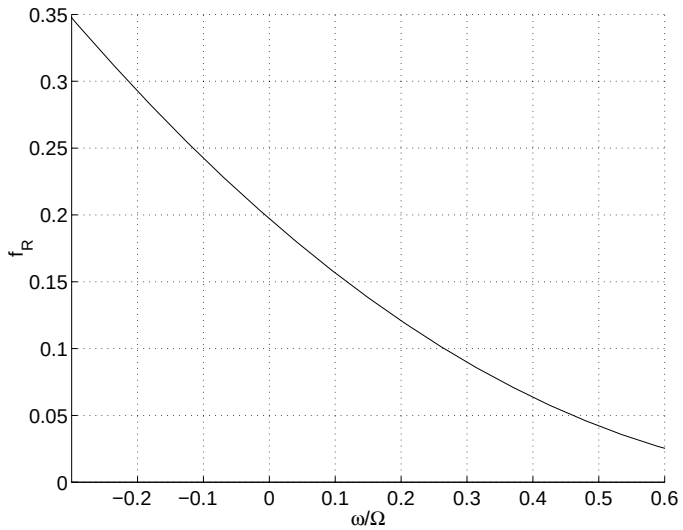


(a) forza radiale

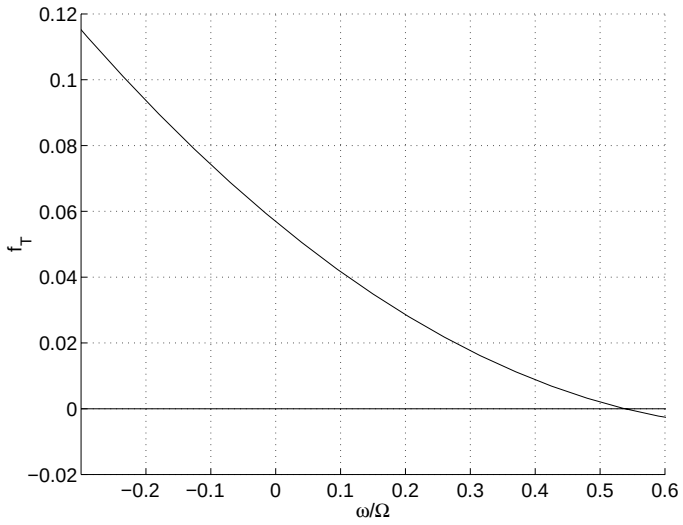


(b) forza tangenziale

Figura 8.6: Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 5$, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm e tre valori di $\mathcal{E}$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$

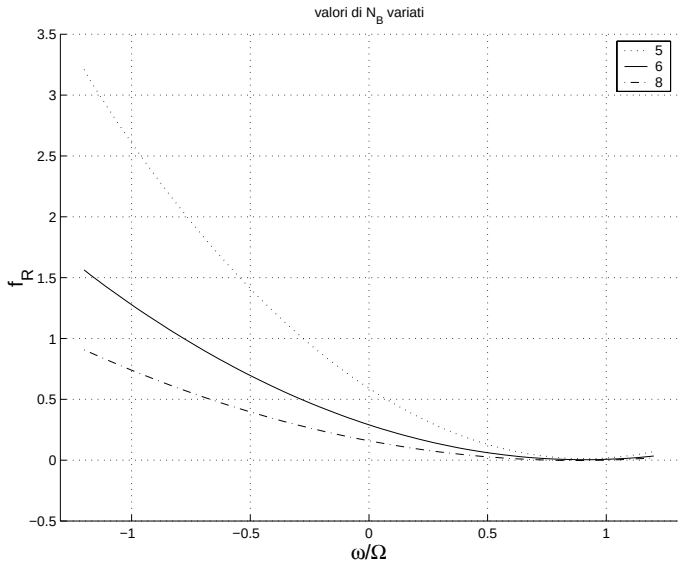


(a) forza radiale

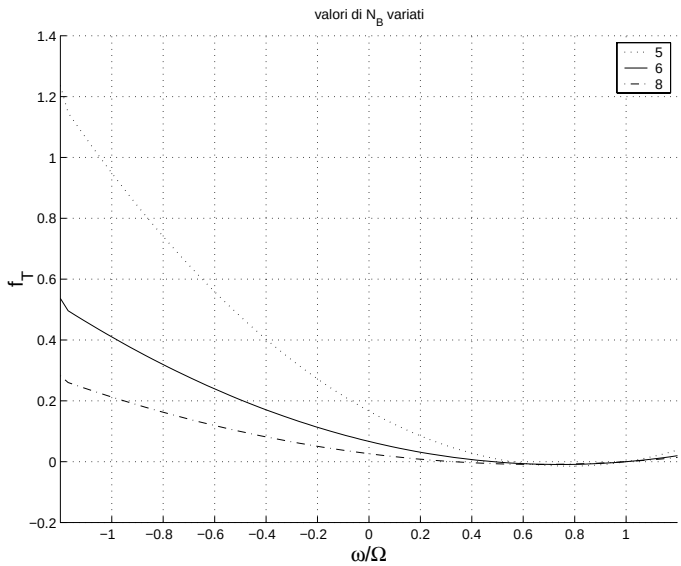


(b) forza tangenziale

Figura 8.7: Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 5$, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm; le forze sono state adimensionalizzate con $\frac{1}{2}\rho_L r_T^3 \Omega^2 \pi \varepsilon$.

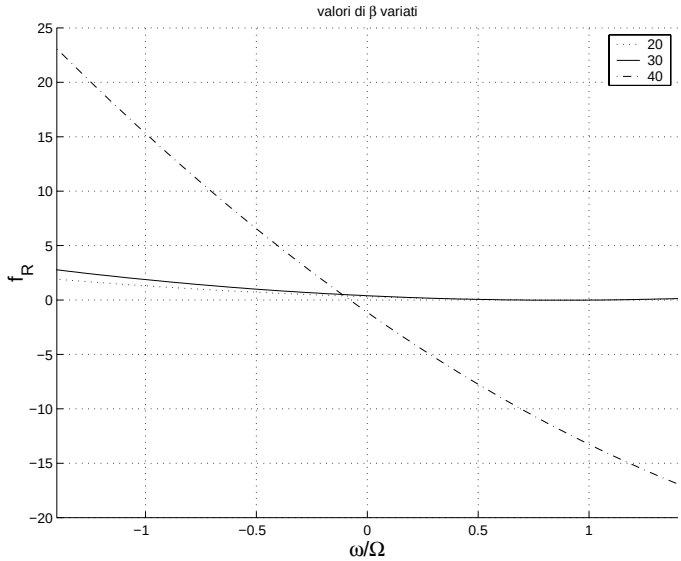


(a) forza radiale

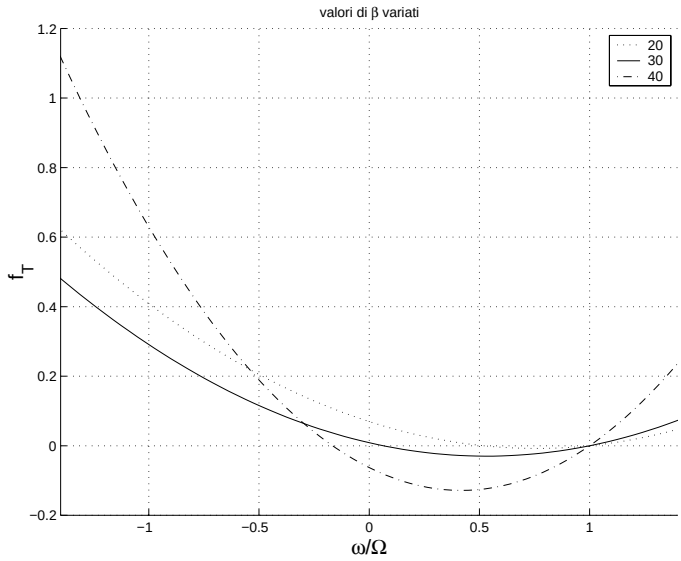


(b) forza tangenziale

Figura 8.8: Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, N_B variabile, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm, $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$.

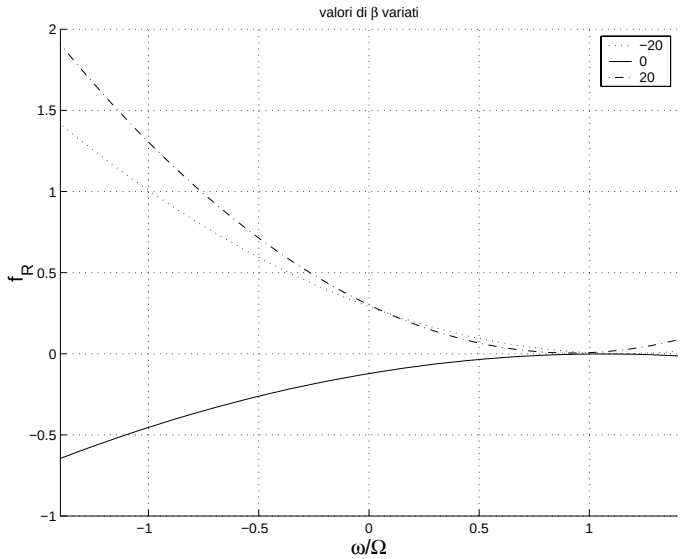


(a) forza radiale

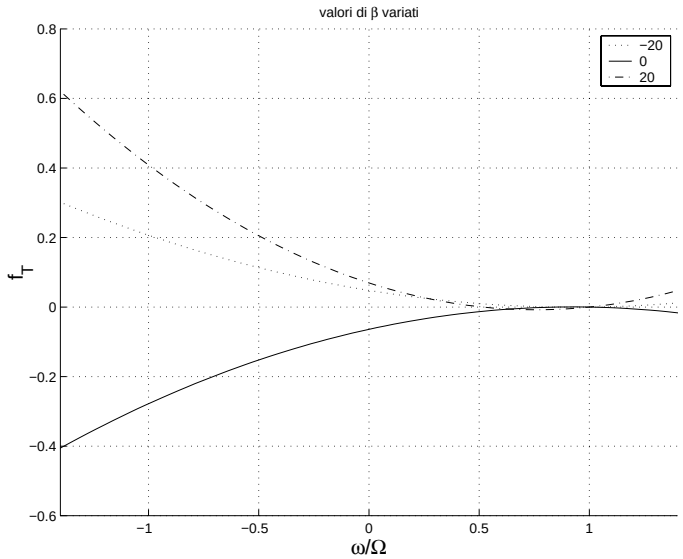


(b) forza tangenziale

Figura 8.9: Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 7$, $\phi = 0.092$, β variabile, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm, $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$.

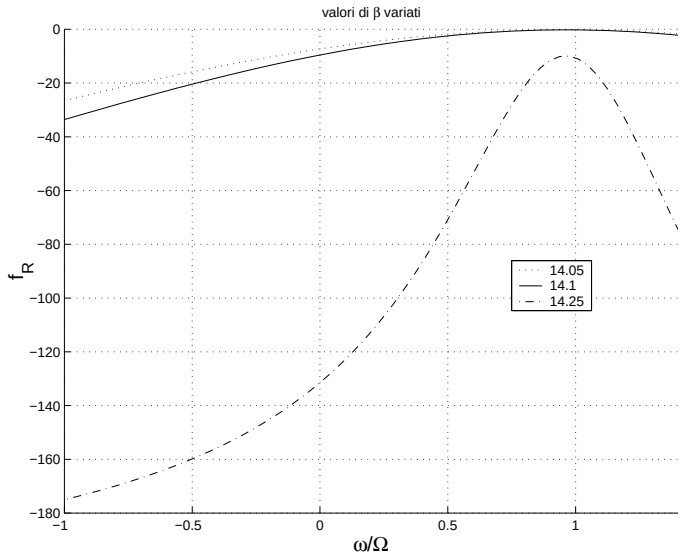


(a) forza radiale

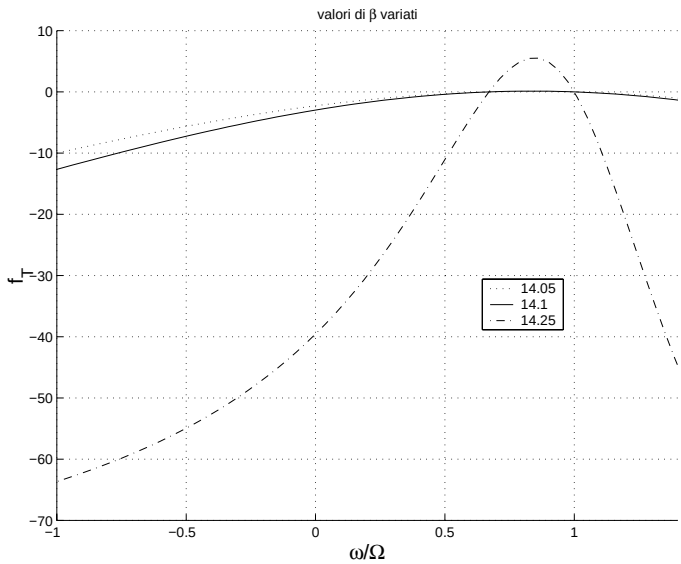


(b) forza tangenziale

Figura 8.10: Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 7$, $\phi = 0.092$, β variabile, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm, $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$.

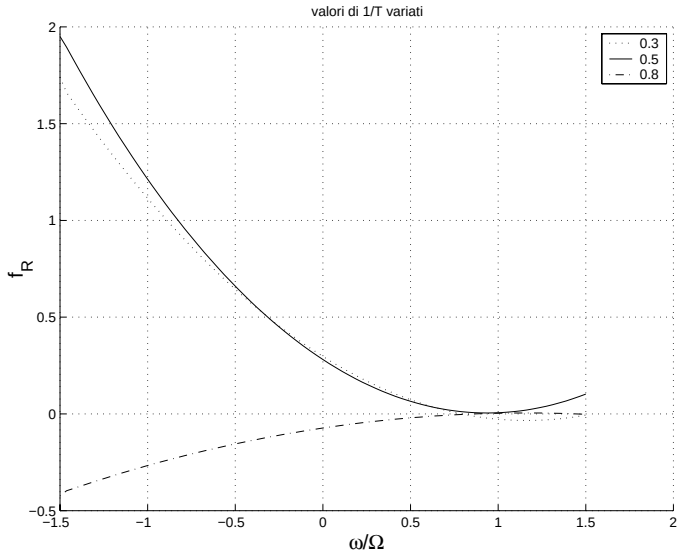


(a) forza radiale

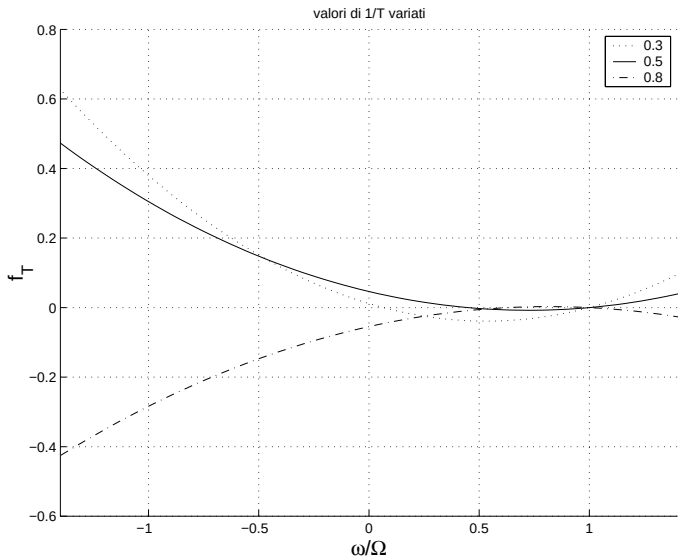


(b) forza tangenziale

Figura 8.11: Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 7$, $\phi = 0.092$, β variabile, $r_T = 81$ mm, $r_H = 40$ mm, $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$.

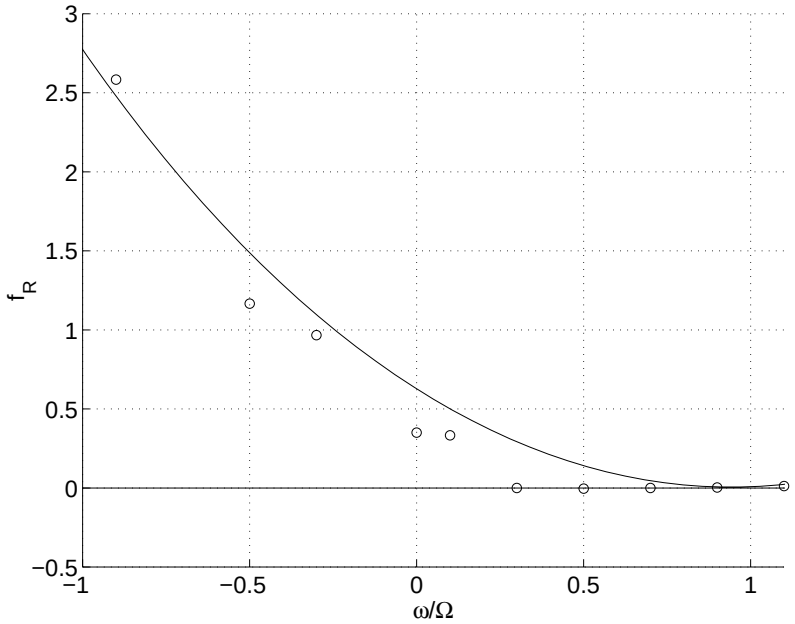


(a) forza radiale

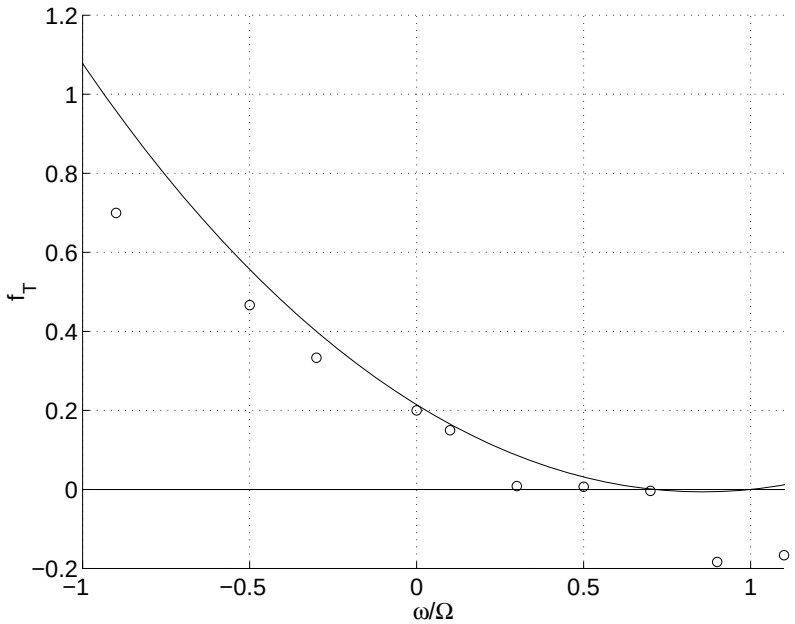


(b) forza tangenziale

Figura 8.12: Risultati dei calcoli con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 7$, $\phi = 0.092$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $1/T = r_H/r_T$ variabile , $\mathcal{E} = 1$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$.



(a) forza radiale



(b) forza tangenziale

Figura 8.13: Confronto tra i risultati del modello in linea continua e i valori misurati da Jery divisi per 6, con $\Omega = 1000$ rpm, $N_B = 5$, $\phi = 0.060$, $\beta = 23°$, $r_T = 81$ mm, $1/T = 0.5$, $\mathcal{E} = 2$; le forze sono state adimensionalizzate con $\rho_L \pi r_T^2 \Omega^2 \varepsilon b$.

Parte III

Conclusioni generali e appendici

CAPITOLO 9

Conclusioni generali

"What is now proved was once only imagined."
— William Blake

S'è investigata la dinamica linearizzata delle forze rotodinamiche in induttori assiali elicoidali prima, e centrifughi con pale a spirale logaritmica poi. Il flusso è stato modellato come completamente bagnato dappertutto fuorché su un sottile strato cavitante aderente alla faccia in aspirazione della pala. L'analisi è stata condotta in maniera analitica anziché numerica, creando due sistemi di coordinate ortogonali solidali col rotore. Il potenziale è stato risolto per espansione modale in serie di Bessel nel primo caso, in funzioni trigonometriche nel secondo. Sono state trovate le frequenze proprie del sistema, reali nel caso assiale, immaginarie nel caso centrifugo. Sono state ottenute le forze rotodinamiche in funzione del rapporto tra le velocità angolari del moto eccentrico e quella del rotore; infine esse sono state confrontate con i valori sperimentali reperibili nella letteratura tecnica di pubblico dominio riferiti a giranti di geometria simile.

9.1 Risultati del lavoro

Il risultato fondamentale del lavoro è che l'effetto della cavitazione sulle forze rotodinamiche nelle pompe è molto dipendente dalla geometria delle stesse. S'è verificato infatti che la cavitazione può essere responsabile dei picchi di forze rotodinamiche instabilizzanti e che, perché ciò avvenga, è necessario che il canale generato dalla palettatura sia relativamente esteso in senso circonferenziale, ovvero che le onde sta-

zionarie ivi contenute abbiano modo di sommarsi in fase su una stessa superficie; in tal senso è necessaria la presenza del mozzo.

Parlando di induttori assiali elicoidali, questo studio ha rivelato alcuni importanti fenomeni di flusso. I risultati indicano chiaramente che la cavitazione sulle pale modifica profondamente le forze rotodinamiche agenti sul rotore dal fluido nel quale è immerso. La risposta dinamica del flusso cavitante all'eccitazione periodica imposta dal moto eccentrico genera molteplici risonanze di flusso, sub- e supersincrone nei canali delle pale, interferendo con comportamento spettrale più regolare delle forze rotodinamiche dei fluidi tipiche del funzionamento non cavitante. L'entità della cavitazione si ripercuote nella determinazione delle velocità critiche e nell'intensità delle forze rotodinamiche dei fluidi. Ai livelli più alti di cavitazione, l'ampiezza delle risonanze del flusso diminuisce e la loro frequenza s'avvicina a quella imposta dalla velocità di rotazione dell'induttore (condizione sincrona). A dispetto della sua natura approssimata, la teoria presente individua correttamente le principali caratteristiche che si osservano nelle forze rotodinamiche. Esistono buoni motivi per credere che essa contribuisca alla comprensione dei complicati fenomeni fisici responsabili dell'innesco e del mantenimento delle instabilità dovute al moto eccentrico libero nelle turbopompe cavitanti.

I risultati principali del presente lavoro sono in parte stati pubblicati ed in parte in fase di pubblicazione (d'Agostino e Venturini Autieri, 2002, 2003).

Per le giranti centrifughe, invece il discorso è diverso, sebbene vi siano indizi per credere che la diversità abbia origine nella geometria caratterizzata dall'assenza del mozzo ovvero di una superficie sulla quale le onde stazionarie abbiano modo di insistere in fase. La teoria non prevede altro — ed in questo è suffragata dai dati sperimentali a disposizione — che modifiche trascurabili rispetto a un flusso completamente bagnato sulle pale. Le frequenze proprie identificate sono immaginarie; corrispondentemente, non sembrano verificarsi risonanze e picchi di forze.

9.2 Interpretazione dei risultati

Si riassumono di sèguito alcuni "punti fermi", risultati sia del lavoro di tesi sia dello studio della letteratura tecnica disponibile (già citata):

- La cavitazione non è una condizione sufficiente, né è necessaria per avere un comportamento irregolare, con picchi più o meno pronunciati, nelle forze rotodinamiche.

- Perché la cavitazione diventi causa sufficiente di irregolarità e picchi nelle forze, sembra necessaria una geometria con mozzo.

- I comportamenti delle forze possono essere irregolari per cause diverse tra loro, sia in induttori assiali, sia in quelli centrifughi.

- Oltre alla cavitazione, ulteriori cause di irregolarità possono essere: inversioni di flusso, trafilamento differenziale tra induttore e alloggiamento, interazioni tra girante centrifuga e voluta.

Uno dei sospetti a monte di questo lavoro era: *la cavitazione favorisce strutture di onde risonanti coerenti con la rotazione del canale attorno all'induttore?* Innanzitutto, solo nel caso degli induttori assiali esiste un canale che si avvolge attorno all'asse. Esaminare anche un induttore centrifugo, ovvero una girante priva di questa caratteristica, è stata una specie di "prova del nove".

Ci sono alcuni indizi a favore dell'idea di onde stazionarie coerenti:

- I picchi nelle forze esistono soltanto nel modello di induttore assiale cavitante, non nell'induttore centrifugo. Solo nel primo esiste un canale che si avvolge e che quindi è in grado di spingere su una superficie nel caso che onde stazionarie finiscano per risultare in fase sulla stessa faccia dell'albero, generando una risultante non nulla.

- Frequenze proprie reali esistono solo nel modello di induttore assiale; le frequenze proprie calcolate nella girante centrifuga sono immaginarie e, corrispondentemente, non esistono picchi in vicinanza di queste. Si può dedurre la presenza di risonanze soltanto nel primo caso.

- All'interno del modello di induttore assiale, la soluzione è stata suddivisa in due, in corrispondenza di un'eccitazione introdotta dalle pale col mozzo fermo e di un'altra legata all'eccitazione del mozzo con pale ferme. Di queste due soluzioni, la prima condizione s'avvicina molto a quella riscontrabile nella girante centrifuga (priva di mozzo) e difatti non ha né frequenze proprie né picchi nelle forze.

9.3 Limiti del modello

L'ipotesi di un *sottile* strato cavitante richiede che il suo spessore sia molto inferiore alla larghezza del canale e che le sue proprietà possano approssimativamente ritenersi costanti su tutta l'estensione delle pale. Nessuna di queste due condizioni è riscontrata esattamente negli induttori cavitanti, tuttavia il confronto con precedenti risultati ottenuti per cavitazione uniformemente distribuita in tutto il canale (d'Agostino e d'Auria, 1997; d'Agostino *et al.*, 1998) mostra che i valori previsti per le forze rotodinamiche sono piuttosto indipendenti dalla esatta geometria delle tasche di cavitazione presenti nel flusso.

Affinché la formulazione in coordinate elicoidali ortogonali sia valida, la lunghezza delle pale dovrebbe essere paragonabile alla loro effettiva sovrapposizione; questa condizione non è verificata negli induttori elicoidali con un piccolo angolo di pala e tantomeno lo è nel cortissimo induttore elicoidale usato per gli esperimenti da Bhattacharyya, nei quali senza dubbio sono molto forti gli effetti di bordo. Probabilmente, questa è la limitazione più stringente dell'analisi presente ed è stata solo parzialmente aggirata introducendo una lunghezza efficace dei canali tra le pale.

L'induttore centrifugo ha limiti del tutto analoghi; il sistema di coordinate su spirali logaritmiche descrivono tanto meglio una geometria reale quanto maggiore è il numero di pale, minore è il loro angolo di inclinazione e più corte esse sono.

Infine, l'approccio di tipo perturbativo, linearizzato, richiede $\varepsilon \ll r_T$; questa condizione può essere assunta in modo piuttosto sicuro nell'analisi di queste macchine.

9.4 Possibili sviluppi

Una sostanziale limitazione della presente analisi, non intrinseca e tuttavia sostanziale, è la scarsa fonte sperimentale a disposizione per il riscontro delle previsioni teoriche.

Il confronto coi dati a disposizione ha mostrato, in linea di massima, una buona corrispondenza qualitativa ma una collimazione meno buona sul piano quantitativo, in special modo per le forze rotodinamiche calcolate per l'induttore centrifugo. Non è tuttavia azzardato affermare che un buonissimo adattamento delle previsioni teoriche ai valori a disposizione sarebbe perlomeno strano, visto che dal modello matematico sono state lasciate fuori molte caratteristiche reali del flusso (trafilamenti, viscosità, inversioni, eccetera) che senza alcun dubbio hanno una consistente influenza sul valore effettivo.

Lo sviluppo di apparecchiature adatte a condurre nuove prove con induttori semplici permetterà di validare con maggiore affidabilità il modello teorico; sarà infatti possibile ottenere valori da induttori dai quali sarà più facile eliminare l'influenza di parametri non inclusi nel modello, non ultimo una geometria semplicemente descrivibile in modo matematico.

Presso il Centrospazio, Ospedaletto, Pisa, è in avanzata fase di realizzazione il CPRTF (Apparato di Prove Rotodinamiche per Pompe Cavitanti, fig. 9.1), il quale permetterà di condurre esperimenti di questo tipo (cen, 2003; Rapposelli *et al.*, 2002).

9.4.1 Il condotto elicoidale

È già stata sottolineata la differenza di comportamento tra l'induttore elicoidale e quello centrifugo. Oltre all'ipotesi che la differenza sia dovuta alla geometria dotata di mozzo, se ne fa un'altra, qui di seguito, ritenuta meno probabile e tuttavia nata con lo studio della letteratura tecnica disponibile.

I condotti elicoidali presentano caratteristiche interessanti e peculiari nel flusso. S'è già detto che non è necessaria la cavitazione per avere forti irregolarità nelle forze rotodinamiche: si pensa che bastino anche flussi secondari e inversioni di flusso. Ebbene, la curvatura dei condotti elicoidali introduce una forza centrifuga che influenza il flusso tra la parete più interna (vicina al centro di curvatura) e la parete più esterna, aumentando le perdite per attrito e facendo nascere un flusso secondario contenente una coppia di vortici controrotanti (Wang, 1981; Germano, 1982; Duh e Shih, 1989; Chen e Jan, 1992, 1993; Yang e Ebadian, 1996). Inoltre, per valori

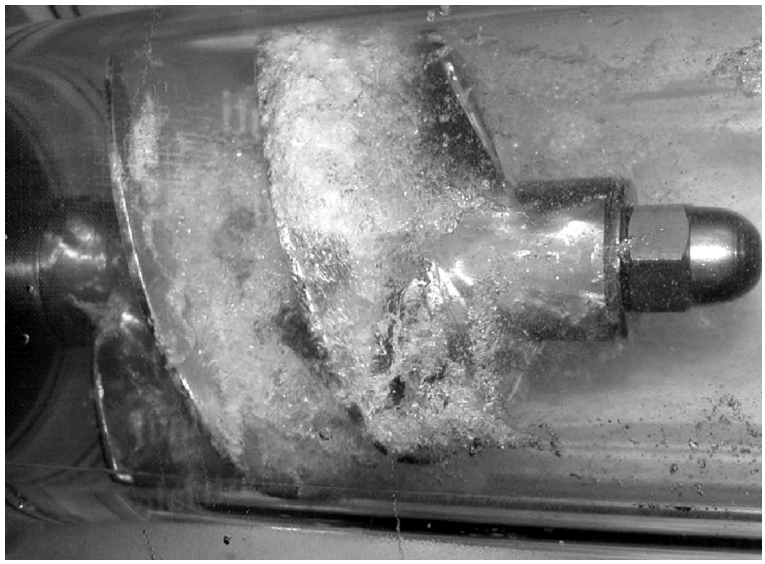


Figura 9.1: CPRTF, Apparato di Prove Rotodinamiche per Pompe Cavitanti

del numero di Dean[1] maggiore di quello critico, il flusso secondario ha un'ulteriore coppia di vortici (instabilità di Dean).

Anche questi effetti secondari potrebbero essere almeno parzialmente responsabili delle discrepanze tra previsioni ed esperimento.

[1]Il numero di Dean rappresenta il rapporto tra la forza centrifuga e quella viscosa.

APPENDICE A

Gli induttori di riferimento

"A hard beginning maketh a good ending."
— *John Heywood,* Proverbes, Part I, Chap. IV

A.1 L'induttore elicoidale

La tabella A.1 riassume la geometria dell'induttore usato per confrontare sperimentalmente il modello della presente tesi. Le tabelle A.2 e A.3 riassumono un paio di insiemi di condizioni di funzionamento, denominate con "A" e "B", provate da Bhattacharyya.

Angolo all'estremità della pala (β_T)	9°
Raggio all'estremità della pala (r_T)	5.06 cm
Rapporto mozzo/estremità (r_H/r_T)	0.4
Numero di pale (N_B)	3
Avvolgimenti attorno all'asse (N_R)	0.485
Solidità	1.45
Corda della pala	15.42 cm
Spessore della pala	0.15 cm (estremità), 0.2 cm (radice)
Lunghezza assiale (L)	2.41 cm
Eccentricità (ε)	0.254 mm

Tabella A.1: "Unshrouded Inducer VII" (Bhattacharyya, 1994)

Velocità di rotazione (Ω)	3000 rpm
Coefficiente di flusso (ϕ)	0.049
Parametro di cavitazione (σ)	0.106

Tabella A.2: Condizioni "A" di funzionamento

Velocità di rotazione (Ω)	3000 rpm
Coefficiente di flusso (ϕ)	0.074
Parametro di cavitazione (σ)	0.093

Tabella A.3: Condizioni "B" di funzionamento

A.2 L'induttore centrifugo

La tabella A.4 riassume la geometria di un induttore e le sue condizioni di funzionamento usate per confrontare il modello della presente tesi.

Angolo della pala (β)	23°
Raggio di uscita (r_T)	81 mm
Raggio di ingresso (r_T/T)	40 mm
Numero di pale (N_B)	5
Coefficiente di flusso (ϕ)	0.092
Larghezza (b)	16 mm
Eccentricità (ε)	0.126 cm

Tabella A.4: "Impeller X" (Jery, 1987; Franz, 1989)

APPENDICE B

Pezzi matematici

"Life is wholly experimental."
— *Robert Louis Stevenson,* A Letter to a young Gentleman

Nell'esplicitazione dei calcoli delle varie componenti delle forze, si incontrano molto spesso forme matematiche in comune, risolte una volta per tutte ed elencate qui di seguito.

Risultati frequenti

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\imath\omega' t}\cos(-\omega' t + a)\,dt = \frac{\omega'}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega'} e^{-\imath\omega' t}\cos(-\omega' t + a)\,dt = \frac{1}{2}e^{-\imath a} \quad \text{(B.1)}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\imath\omega' t}\,\mathrm{sen}(-\omega' t + a)\,dt = \frac{\imath}{2}e^{-\imath a} \quad \text{(B.2)}$$

$$\int_{s_1'}^{s_1'+N_R} \mathrm{sen}\,\frac{m\pi(s'-s_1')}{N_R}\frac{1}{2}e^{-\imath(b-2\pi s')}ds'$$
$$= \frac{e^{-\imath(b-2\pi s_1')}N_R}{2\pi(m-2N_R)(m+2N_R)}\left\{m + e^{2\imath N_R\pi}\left[-m\cosh(\imath m\pi) + 2N_R\,\mathrm{senh}(\imath m\pi)\right]\right\} \quad \text{(B.3)}$$

$$\int_{s_1'}^{s_1'+N_R} \cos\frac{m\pi(s'-s_1')}{N_R}\frac{1}{2}e^{-\imath(b-2\pi s')}\,ds'$$
$$= \frac{e^{-\imath(b-2\pi s_1')}N_R}{2\pi(m-2N_R)(m+2N_R)}\left\{-2\imath N_R + \imath\, e^{2\imath N_R\pi}\left[-m\,\sinh(\imath\, m\pi) + 2N_R\cosh(\imath\, m\pi)\right]\right\} \tag{B.4}$$

$$\int_0^1 e^{-\imath c\, n'}\cosh(x\, n')\,dn' = e^{-\imath c}\frac{-\imath c\, e^{\imath c} + \imath c\,\cosh x + x\,\mathrm{senh}\, x}{c^2+x^2} \tag{B.5}$$

$$\int_0^1 e^{-\imath c\, n'}\cosh[x\,(n'-1)]\,dn' = \frac{\imath c\, e^{-\imath c} - \imath c\,\cosh x + x\,\mathrm{senh}\, x}{c^2+x^2} \tag{B.6}$$

$$\int_0^1 e^{-\imath c\, n'}\,\mathrm{senh}[x\,(n'-1)]\,dn' = \frac{x\, e^{-\imath c} - x\cosh x + \imath c\,\mathrm{senh}\, x}{c^2+x^2} \tag{B.7}$$

Espressioni in comune

$$\mathfrak{M} = \frac{\varepsilon P^2\cos^2\beta_M}{\pi N_B N_R} \tag{B.8}$$
$$c = \frac{2\pi}{N_B}\,\mathrm{sen}^2\,\beta_M \tag{B.9}$$

$$\mathcal{P}_{1_m} = \frac{m + e^{2\imath N_R\pi}\left[-m\,\cosh(\imath\, m\pi) + 2N_R\sinh(\imath\, m\pi)\right]}{(m-2N_R)(m+2N_R)} \tag{B.10}$$

$$\mathcal{P}_{2_m} = \frac{-2\imath N_R + \imath\, e^{2\imath N_R\pi}\left[-m\,\sinh(\imath\, m\pi) + 2N_R\cosh(\imath\, m\pi)\right]}{(m-2N_R)(m+2N_R)} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k &= \int_0^1 e^{-\imath c\, n'}\cosh\left(\imath\sqrt{-\nu_k^2}\, n'\right)\,dn' \quad \text{(cfr. (B.5))}\\ &= \frac{\imath}{2}\frac{e^{-\imath\left(c+\sqrt{-\nu_k^2}\right)}}{\left(c-\sqrt{-\nu_k^2}\right)\left(c+\sqrt{-\nu_k^2}\right)}\\ &\times\left[c - 2ce^{\imath\left(c+\sqrt{-\nu_k^2}\right)} - \sqrt{-\nu_k^2} + e^{2\imath\sqrt{-\nu_k^2}}\left(c+\sqrt{-\nu_k^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{B.12}$$

Integrali in s'

$$\mathcal{I}_{S_m} = \int_{s'_1}^{s'_1+N_R} \operatorname{sen} \frac{m\pi(s'-s'_1)}{N_R}\, e^{-2\imath\pi s'}\, ds' \tag{B.13}$$

che, per le (B.3) e (B.10), vale:

$$\mathcal{I}_{S_m} = e^{2\imath\,\pi s'_1} \frac{N_R}{2\pi} \mathcal{P}_{1_m}$$

Integrali in n'

$$\mathcal{I}_{2_k} = \int_0^1 e^{\imath \frac{2\pi}{N_B} n' \operatorname{sen}^2 \beta_M} \cos\left(\sqrt{-\nu_k^2}\, n'\right)\, dn' \tag{B.14}$$

il cui risultato è, con la posizione (B.9):

$$\mathcal{I}_{2_k} = -e^{-\imath\sqrt{-\nu_k^2}} \frac{-2\imath c\, e^{\imath\sqrt{-\nu_k^2}} + \imath\, e^{\imath\left(c+2\sqrt{-\nu_k^2}\right)}\left(c-\sqrt{-\nu_k^2}\right) + \imath\, e^{\imath c}\left(c+\sqrt{-\nu_k^2}\right)}{2\left(c^2+\nu_k^2\right)}$$

Calcoli con R_{lm}

$$\mathcal{I}_{R_{lm}} = \int_{r_H}^{r_T} R_{lm}(r')\, dr' \tag{B.15}$$

$$\mathcal{I}_{R^2_{lm}} = \int_{r_H}^{r_T} R^2_{lm}(r')\, r'\, dr' \tag{B.16}$$

Calcoli con R_{km} Tramite le (B.13) e (B.14) e fatta la posizione seguente:

$$\mathcal{I}_{km} = -\frac{\imath\,\varepsilon\,(\omega' - \Omega'_F)\, e^{\imath\theta_j}}{\lambda_k^* \left(\frac{1}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2|\nu_k|)}{8|\nu_k|}\right) N_R}\, \mathcal{I}_{2_k}\, \mathcal{I}_{s_m}, \tag{B.17}$$

R_{km} può scriversi come:

$$R_{km}(r') = \mathcal{I}_{km} \frac{K'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)\; I_{q_m}(\lambda_k^* r') - I'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)\; K_{q_m}(\lambda_k^* r')}{I'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)\; K'_{q_m}(\lambda_k^* r_T) - K'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)\; I'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)}. \tag{B.18}$$

Si definisca $\mathcal{I}_{R_{km}}$ in modo che risulti:

$$\mathcal{I}_{R_{km}}\, \mathcal{I}_{km} = \int_{r_H}^{r_T} R_{km}(r')\, dr',$$

ovvero

$$\mathcal{I}_{R_{km}} = \int_{r_H}^{r_T} \frac{K'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)\; I_{q_m}(\lambda_k^* r') - I'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)\; K_{q_m}(\lambda_k^* r')}{I'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)\; K'_{q_m}(\lambda_k^* r_T) - K'_{q_m}(\lambda_k^* r_H)\; I'_{q_m}(\lambda_k^* r_T)} dr'. \tag{B.19}$$

$\mathcal{I}_0$ **e** $\mathcal{I}_1$**:**

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_{0_{lm}} = (\omega' - \Omega'_F)\,\frac{\mathfrak{M}}{\nu_{lm}}\,e^{\imath\theta_j}\frac{\mathcal{I}_{R_{lm}}\mathcal{I}_{S_m}}{\mathcal{I}_{R^2_{lm}}} \tag{B.20}$$

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_{1_{lm}} = (\omega' - \Omega'_F)\,\mathfrak{M}\,e^{\imath(c+\theta_j)}\frac{\mathcal{I}_{R_{lm}}\mathcal{I}_{S_m}}{\mathcal{I}_{R^2_{lm}}} \tag{B.21}$$

Termine delle singolarità per ω'

$$\mathcal{D}_{lm} = \nu_{lm}\,\mathrm{senh}\,\nu_{lm} - K_C\omega'^2\cosh\nu_{lm} \tag{B.22}$$

APPENDICE C

Appunti per un induttore con pale radiali

"Science never solves a problem without creating ten more."
— George Bernard Shaw

La formulazione adottata per descrivere l'induttore centrifugo non è valida (presenta una singolarità) nel caso semplice $\beta = 0°$. Pertanto, di sèguito si indicheranno i passi da compiere per affrontare il caso con pale perfettamente radiali.

C.1 Equazioni delle superfici nel riferimento polare rotante

Pala completamente bagnata:

$$b_B(r^*, \theta^*, t) = \theta^* - \theta_j = 0$$
$$b_B(r, \theta, t) = \theta - \Omega t - \frac{\varepsilon}{r}\,\mathrm{sen}(\theta - \omega t) - \theta_j = 0$$
$$b_B(r', \theta', t) = \theta' + \frac{\varepsilon}{r'}\,\mathrm{sen}(\theta' - \omega' t) - \theta_j = 0$$

Pala cavitante: Sia $\delta_r(t)$ lo spessore angolare relativo allo strato cavitante; δ_r è costante lungo r e adimensionalizzato con la spaziatura angolare $2\pi/N_B$ del canale. Pertanto lo spessore effettivo dello strato cavitante è crescente con r e racchiuso tra due superfici radiali, una delle quali è la pala aspirante.

$$b_{B_{cav}} = \theta' + \delta_r(t) + \frac{\varepsilon}{r'}\,\mathrm{sen}\,[\theta' + \delta_r(t) - \omega' t] - \theta_j = 0$$

Linearizzando al primo ordine:

$$b_{B_{cav}} = \theta' + \delta_r(t) + \frac{\varepsilon}{r'}\,\mathrm{sen}(\theta' - \omega' t) - \theta_j = 0$$

C.2 Componenti di velocità nel riferimento polare

Velocità assoluta

$$\mathbf{u} = u\boldsymbol{e}_r + v\boldsymbol{e}_\theta$$

Flusso relativo

$$\mathbf{u}' = \overline{\mathbf{u}}' + \tilde{\mathbf{u}}' = \overline{\mathbf{u}}' + \nabla'\tilde{\varphi}$$

ovvero, lungo $\boldsymbol{e}_{r'}$:

$$u' = \overline{u}' = u + \frac{\partial}{\partial r'}\tilde{\varphi}$$

e lungo $\boldsymbol{e}_{\theta'}$:

$$v' = \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial \theta'}\tilde{\varphi}$$

Flusso imperturbato relativo

$$\overline{\mathbf{u}}' = \overline{u}'\boldsymbol{e}_{r'} + \overline{v}'\boldsymbol{e}_{\theta'} = \overline{u}'\boldsymbol{e}_{r'} = u\boldsymbol{e}_{r'}$$

C.3 Metrica

$$\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial r'}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta'}\right)$$

$$\nabla'^2 = \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\frac{\partial}{\partial r'}\right) + \frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta'^2}$$

C.4 Condizioni al contorno in (r', θ', t)

$$\frac{\partial b}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}}' + \nabla'\tilde{\varphi})\,\nabla' b = 0$$

cioè

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \left(u + \frac{\partial}{\partial r'}\tilde{\varphi}\right)\frac{\partial b}{\partial r'} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{r'\partial \theta'}\frac{\partial b}{r'\partial \theta'} = 0$$

Pala bagnata:

$$-\frac{\omega'\varepsilon}{r'}\cos(\theta'-\omega' t)+\left(u+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r'}\right)\left[-\frac{\varepsilon\,\mathrm{sen}(\theta'-\omega' t)}{r'^2}\right] + \frac{1}{r'^2}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta'}\left[1+\frac{\varepsilon}{r'}\cos(\theta'-\omega' t)\right]=0$$

Linearizzando al primo ordine perturbativo:

$$-\omega'\varepsilon\cos(\theta'-\omega' t)-\frac{\varepsilon u}{r'}\,\mathrm{sen}(\theta'-\omega' t)+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{r'\partial\theta'}=0$$

Pala cavitante, al primo ordine:

$$-\frac{\omega'\varepsilon}{r'}\cos(\theta'-\omega' t)+\frac{\delta_r}{a_C^2}\frac{\rho_L}{\rho_C}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial t^2}-\frac{\varepsilon}{r'^2}u\,\mathrm{sen}(\theta'-\omega' t)+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{r'^2\partial\theta'}=0$$

Ingresso e uscita:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t}=0\quad r'=r_H,r_T$$

C.4.1 C.c. complesse

Pala bagnata:

$$-\omega'\varepsilon e^{\imath\theta'}e^{-\imath\omega' t}+\frac{u\varepsilon}{r'}\imath e^{\imath\theta'}e^{-\imath\omega' t}+\frac{\partial\hat{\varphi}}{r'\partial\theta'}=0$$

Pala cavitante:

$$-\frac{\omega'\varepsilon}{r'}e^{\imath\theta'}e^{-\imath\omega' t}-\omega'^2\frac{\delta_r}{a_C^2}\frac{\rho_L}{\rho_C}\hat{\varphi}+\frac{\varepsilon u}{r'^2}\imath e^{\imath\theta'}e^{-\imath\omega' t}+\frac{\partial\hat{\varphi}}{r'^2\partial\theta'}=0$$

Ingresso e uscita:

$$\hat{\varphi}=0,\quad r'=r_H,r_T$$

C.5 Separazione dell'equazione di campo

$$\tilde{\varphi}=\mathrm{Re}\{\hat{\varphi}\},\quad \hat{\varphi}=R(r')T(\theta')e^{-\imath\omega' t}$$

$$\nabla'^2\hat{\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r'}\right)+\frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial\theta'^2}=0$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{r'\partial r'}+\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{\partial r'^2}+\frac{\partial^2\hat{\varphi}}{r'^2\partial\theta'^2}=0$$

$$\frac{R'}{r'R} + \frac{R''}{R} + \frac{T''}{r'^2 T} = 0$$
$$\frac{T''}{T} = -r'\frac{R'}{R} - r'^2\frac{R''}{R} = \tau^2$$

da cui:

$$T'' - \tau^2 T = 0$$
$$r'^2 R'' + r'R' + \tau^2 R = 0$$

La soluzione generale per $\hat{\varphi}$ è:

$$\hat{\varphi} = (c_1 r^{-\imath\tau} + c_2 r^{\imath\tau}) \left[c_3 \cosh\left(\sqrt{\tau^2}\theta'\right) + c_4 \operatorname{senh}\left(\sqrt{\tau^2}\theta'\right)\right] e^{-\imath\omega' t}$$

C.6 Probema radiale agli autovalori

$$\begin{cases} r'^2 R'' + r'R' + \tau^2 R = 0 \\ R(r_H) = 0 \\ R(r_T) = 0 \end{cases}$$

$$R(r_H) = 0 \Leftrightarrow c_1 r_H^{-\imath\tau} + c_2 r_H^{\imath\tau} = 0$$
$$R(r_T) = 0 \Leftrightarrow c_1 r_T^{-\imath\tau} + c_2 r_T^{\imath\tau} = 0$$

$$\begin{Vmatrix} r_H^{-\imath\tau} & r_H^{\imath\tau} \\ r_T^{-\imath\tau} & r_T^{\imath\tau} \end{Vmatrix} = 0$$

Posto $a = r_T/r_H > 1$, l'equazione equivale a:

$$a^{2\imath\tau} - 1 = 0$$
$$\left(e^{\log a}\right)^{2\imath\tau} = 1$$

Posto $y = 2\tau \log a$:

$$e^{\imath y} = 1$$
$$\cos y + \imath \operatorname{sen} y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 2l\pi, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Perciò gli autovalori sono

$$\tau_l = \frac{l\pi}{\log r_T - \log r_H}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Detta x la variabile indipendente e y quella dipendente, un generico problema di Sturm-Liouville ha l'ODE nella forma

$$y''(x)u(x) + y'(x)u'(x) + [v(x) + \lambda^2 w(x)]y(x) = 0$$

Siano allora $x = r'$ e $y(x) = R(r')$; allora, con le posizioni:

$$u(x) = x = r'$$
$$v(x) = 0$$
$$w(x) = 1/x = 1/r'$$

l'ODE radiale, assieme alle c.c. date, è un problema di Sturm-Liouville con operatore autoaggiunto; la funzione peso è $w = 1/r'$ e gli autovalori sono $(-\tau^2)$. Ciò garantisce che gli autovalori $(-\tau^2)$ sono reali, numerabili (senza punti di accumulazione) e che vi corrispondono autofunzioni $R_l(r')$ ortogonali tramite la funzione peso $1/r'$:

$$\int_{r_H}^{r_T} \frac{R_l R_k}{r'} dr' = 0 \quad k \neq l$$

Inoltre, l'insieme delle autofunzioni è completo, perciò è possibile rappresentare la soluzione con una espansione in autofunzioni. Il determinante nullo fa acquistare un grado di libertà al sistema delle c.c.; scegliendo perciò arbitrariamente

$$c_1 = -1$$

si ottiene:

$$c_2 = r_H^{-\frac{2i\pi}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)}}$$

e le autofunzioni sono

$$R_l(r') = \frac{r^{\frac{il\pi}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)}}}{r_H^{\frac{2i\pi}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)}}} - \frac{1}{r^{\frac{il\pi}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)}}}$$

C.7 Soluzione al problema non omogeneo

$$\hat{\varphi} = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[c_3 \cosh\left(\frac{l\pi}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} \theta' \right) + c_4 \operatorname{senh}\left(\frac{l\pi}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} \theta' \right) \right] R_l(r') \right\} e^{-i\omega' t}$$

C.c. sulla pala non cavitante, $\theta' = \theta_j$, $j = 1, 2, \ldots, N_B$

$$-\omega' \varepsilon e^{i\theta_j} + \frac{u\varepsilon i}{r'} e^{i\theta_j} + \frac{1}{r'} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{l\pi}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} \left[c_3 \operatorname{senh} \frac{l\pi\theta_j}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} + c_4 \cosh \frac{l\pi\theta_j}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} \right] R_l(r') \right\} = 0$$

C.c. sulla pala cavitante, $\theta' = \theta_{j+1}$**,** $j = 1, 2, \ldots, N_B$

$$-\frac{\omega' \varepsilon}{r'} e^{\imath\theta_{j+1}} - \omega'^2 \frac{\delta_r}{a_C^2} \frac{\rho_L}{\rho_C} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[c_3 \cosh \frac{l\pi\theta_{j+1}}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} + c_4 \operatorname{senh} \frac{l\pi\theta_{j+1}}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} \right] R_l(r') \right\}$$

$$+\frac{\varepsilon u}{r'^2} \imath e^{\imath\theta_{j+1}} + \frac{1}{r'^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{l\pi}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} \left[c_3 \operatorname{senh} \frac{l\pi\theta_{j+1}}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} + c_4 \cosh \frac{l\pi\theta_{j+1}}{\log\left(\frac{r_T}{r_H}\right)} \right] R_l(r') \right\} = 0$$

Bibliografia

2003. Cavitating pump rotordynamic test facility. Rap. tecn., Centrospazio, Via Gherardesca, 5, Ospedaletto, Pisa. http://www.centrospazio.cpr.it/

Adkins, D. R. e Brennen, C. E., 1988. Analysis of hydrodynamic radial forces on centrifugal pump impeller. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 110:20–28

Arndt, N. e Franz, R., 1986. *Observations of Hydrodynamic Forces on Several Inducers Including the SSME LPOTP*. Tesi di dottorato, Division of Engineering and Applied Sciences, California Institute of Technology, Pasadena, California. Report No. E249.3

Baskharone, E. A., 1999. Swirl brake effect on the rotordynamic stability of a shrouded impeller. *ASME Journal of Turbomachinery*, 121:127–133

Bhattacharyya, A., 1994. *Internal Flows and Force Matrices in Axial Flow Inducers*. Tesi di dottorato, California Institute of Technology

Bhattacharyya, A., Acosta, A. J., Brennen, C. E. e Caughey, T. K., 1997. Rotordynamic forces in cavitating inducers. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 119(4):768–774. ISSN 0098-2202

Brennen, C. E., 1994. *Hydrodynamics of Pumps*. Concepts ETI, Inc. and Oxford University Press, Concepts ETI, Inc. P. O. Box 643, Norwich, Vermont 05055, USA — Oxford University Press, Walton Street, Oxford OX2 6DP, England. ISBN 0-933283-07-5 (Concepts ETI, Inc.), 0-19-856442-2 (Oxford University Press)

—, 1995. *Cavitation and Bubble Dynamics*. Oxford Engineering Science Series. Oxford University Press, New York. ISBN 0-19-509409-3

Campos, L. M. B. C. e Gil, P. J. S., 1995. On spiral coordinates with application to wave propagation. *Journal of Fluid Mechanics*, 301:153–173

Chamieh, D. S., Acosta, A. J., Brennen, C. E. e Caughey, T. K., 1985. Experimental measurements of hydrodynamic radial forces and stiffness matrices for a centrifugal pump impeller. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 107:307–315

Chen, W.-H. e Jan, R., 1992. The characteristics of laminar flow in a helical circular pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, 244:241–256

—, 1993. The torsion effect on fully developed laminar flow in helical square ducts. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 115:292–301

Coxeter, H. S. M., 1969. *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., seconda ed.

d'Agostino, L. e d'Auria, F., 1997. Three-dimensional analysis of rotordynamic forces on whirling and cavitating inducers. In *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, June 22–26*, vol. ASME Paper FEDSM97-3335. Vancouver, British Columbia, Canada

d'Agostino, L., d'Auria, F. e Brennen, C. E., 1998. A three-dimensional analysis of rotordynamic forces on whirling and cavitating helical inducers. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 120:698–704

d'Agostino, L., Rapposelli, E., Pascarella, C. e Ciucci, A., 2001. A modified bubbly isenthalpic model for numerical simulation of cavitating flows. In *37th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, vol. AIAA 2001-3402. AIAA

d'Agostino, L. e Venturini Autieri, M. R., 2002. Three-dimensional analysis of rotordynamic fluid forces on whirling and cavitating finite-length inducers. In *The 9th of International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*. Honolulu, Hawaii

—, 2003. Analisi delle forze rotodinamiche in giranti centrifughe cavitanti

d'Auria, F., d'Agostino, L. e Brennen, C. E., 1995. Bubble dynamics effects on the rotordynamic forces in cavitating inducers. In *ASME Cavitation and Multiphase Flow Forum*, vol. FED 201, pp. 47–54. Hilton Head Island, South Carolina

Duh, T.-Y. e Shih, Y.-D., 1989. Fully developed flow in curved channels of square cross sections inclined. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 111:172–177

Edwards, S., Lees, A. W. e Friswell, M. I., 1999. The influence of torsion on rotor/stator contact in rotating machinery. *Journal of Sound and Vibration*, 225(4):767–778

Franz, R., 1989. *Experimental Investigation of the Effect of Cavitation on the Rotordynamic Forces on a Whirling Centrifugal Pump Impeller*. Tesi di dottorato, Division of Engineering and Applied Sciences, California Institute of Technology, Pasadena, California. Report No. 249.8

Germano, M., 1982. On the effect of torsion on a helical pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 125:1–8

Guinzburg, A., 1992. *Rotordynamic Forces Generated by Discharge-to-Suction Leakage Flows in Centrifugal Pumps.* Tesi di dottorato, California Institute of Technology, Pasadena, California

Hiwata, A. e Tsujimoto, Y., 2002. Theoretical analysis of fluid forces on an open-type centrifugal impeller in whirling motion. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 124(2):342–347

Jery, B., 1987. *Experimental Study of Unsteady Hydrodynamic Force Matrices on Whirling Centrifugal Pump Impellers.* Tesi di dottorato, Division of Engineering and Applied Sciences, California Institute of Technology, Pasadena, California. Report No. E200.22

Jery, B., Acosta, A. J. e Caughey, T. K., 1985. Forces on centrifugal pump impellers. In *Proceedings of 2nd International Pump Symposium, Texas, April 29 – May 2*, pp. 21–32. Houston, Texas, USA

Kalnins, E. G. e Miller Jr, W., 1979. Non-orthogonal separable coordinate systems for the flat 4-space Helmholtz equation. *J. Phys. A: Math Gen.*, 12(8):1129–1147

—, 1981. Nonorthogonal R-separable coordinates for four-dimensional complex Riemannian spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 22(1):42–50

—, 1983. The general theory of R-separation for Helmholtz equations. *Journal of Mathematical Physics*, 24(5):1047–1053

Kim, H. S., Cho, M. e Song, S. J., 2002. Stability analysis of a turbine rotor system with Alford forces. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4):777–790

Manoussaki, D. e Chadwick, R. S., 2000. Effects of geometry on fluid loading in a coiled cochlea. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(2):369–386. ISSN 0036-1399

Marsili, R., 1995–1996. *Analisi Tridimensionale delle Forze Rotodinamiche su Induttori Assiali Cavitanti Soggetti a Moto di Precessione.* Tesi di laurea, Università degli Studi di Pisa — Facoltà di Ingegneria — Centrospazio. Relatori: Prof. L. d'Agostino, Prof. R. Lazzeretti

Mei, C. C., 1995. *Mathematical Analysis in Engineering*, cap. Finite Domains and Separation of Variables. Cambridge University Press

Morse, P. M. e Feshbach, H., 1953. *Methods of Theoretical Physics.* MacGraw-Hill, New York

Ohasi, H. e Shoji, H., 1987. Lateral fluid forces on whirling centrifugal impeller (2nd report: Experiment in vaneless diffuser). *ASME Journal of Fluids Engineering*, 109:100–106

Rapposelli, E., Cervone, A., Bramanti, C. e d'Agostino, L., 2002. A new cavitation test facility at centrospazio. In *4th International Conference on Launcher Technology "Space Launcher Liquid Propulsion"*. Liege, Belgio

Rapposelli, E. e d'Agostino, L., 2001. A modified isenthalpic model of cavitation in plane journal bearings. In *Proceedings of Fourth International Symposium on Cavitation*, vol. CAV2001:Session B5.003. Pasadena, California

Rosenmann, W., 1965. Experimental investigations of hydrodinamically induced shaft forces with a three bladed inducer. In *Proc. ASME Symp. on Cavitation in Fluid Machinery*, pp. 172–195

Shoji, H. e Ohasi, H., 1987. Lateral fluid forces on whirling centrifugal impeller (1st report: Theory). *ASME Journal of Fluids Engineering*, 109:94–99

Tsujimoto, Y., Yoshida, Y., Ohashi, H., Teramoto, N. e Ishizaki, S., 1997. Fluid force moment on a centrifugal impeller shroud in precessing motion. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 119:366–371

Uy, R. V. e Brennen, C. E., 1999. Experimental measurments of rotordynamic forces caused by front shroud pump leakage. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 121:633–637

Visser, F. C., 1999. On the asymptotic solution of the Poisson equation, describing the two-dimensional incompressible inviscid flow in a rotating centrifugal impeller. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 79(5):353–356

Visser, F. C., Brouwers, J. J. H. e Badie, R., 1994. Theoretical analysis of inertially irrotational and solenoidal flow in two-dimensional radial-flow pump and turbine impellers with equiangular blades. *Journal of Fluid Mechanics*, 269:107–141

Wang, C. Y., 1981. On the low-reynolds-number flow in a helical pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, 108:185–194

Wolfram-Research, 1999. Mathematica 4.0. Programma di calcolo per Windows

Yang, G. e Ebadian, M. A., 1996. Turbulent forced convection in a helicoidal pipe with substantial pitch. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(10):2015–2022. ISSN 0017-9310(95)00303-7

Zwillinger, D., 1992. *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, Inc., 1250 Sixth Avenue, San Diego, CA 92101, seconda ed. ISBN 0-12-784391-4