‘‘*le* Costruzioni Aeronautiche *senza paura*’’

vadetecum tecnico e morale per giovani ingegneri

ver. 2.92

Marco R. Venturini Autieri[1]

17 settembre 2002

[1] © 2002 Ho realizzato questo documento con LaTeX. Una versione aggiornata può essere reperita su http://digilander.libero.it/turbopump/ o su http://131.114.29.9/%7Es180339/ Può essere distribuito liberamente, purché gratuitamente. Sono reperibile per e-mail su s180339@studenti.ing.unipi.it e su 18033911@studenti.unipi.it. *Questa breve raccolta di appunti non ha la pretesa di portare altro buio alla materia delle costruzioni aeronautiche, né di essere un valido schema riassuntivo. Essa è piuttosto una lista di brevi istruzioni per chi sa già ma vuole dimenticare.*

Indice

1 Campo di tensione diagonale **4**
- 1.1 Calcolo delle deformazioni . . . 6
- 1.2 Calcolo dell'orientamento α del nuovo sistema di assi . . . 9
- 1.3 Osservazioni sugli irrigidimenti: la trave di Wagner . . . 9

2 Palloncini gonfiabili *ovvero* tensioni membranali in recipienti sotto pressione **13**
- 2.1 Forze . . . 14
- 2.2 Esempi notevoli . . . 14
  - 2.2.1 Raccordo perfetto . . . 14
  - 2.2.2 Bulkhead . . . 15
  - 2.2.3 Calotta ellittica con $\phi = 0$ . . . 16
- 2.3 Un'analisi delle deformazioni rivela che... . . . 16
- 2.4 La perturbazione introdotta dalle ordinate nel campo membranale . . . 17
- 2.5 I Fori Neutri *(ci sono e non ci sono)* . . . 19
  - 2.5.1 Il caso più semplice, ovviamente di nessun interesse pratico . . . 20

3 Che fatica la meccanica della frattura! **23**
- 3.1 K_t e K . . . 23
- 3.2 Che fatica! . . . 26
- 3.3 Come trattare e cosa sapere sui cicli V.A., buttando via P-M e vivendo felici . . . 30

4 Filosofie di progetto **32**
- 4.1 Introduzione: le filosofie di progetto in relazione alla fatica . . . 32
- 4.2 Le due (o tre?) filosofie . . . 32
- 4.3 La *Tolleranza al Danno* (DT) . . . 32
- 4.4 Durability . . . 33
- 4.5 C'è stato un tempo... . . . 34
- 4.6 Strutture di Back-Up . . . 35
- 4.7 Multiple load path . . . 35
- 4.8 Il crack-arrest, con particolare riguardo ai pannelli irrigiditi di fusoliera . . . 35
  - 4.8.1 Come si ottiene la curva 4.8 . . . 36
  - 4.8.2 Il problema dei corrente e dei rivetti . . . 37
  - 4.8.3 Sulla geometria dei correnti . . . 37

5 Minimo Peso **41**
- 5.1 In che modo un'ala si trasforma in un rettangolo . . . 43
- 5.2 Criterio generale di minimo peso . . . 43
- 5.3 Effetto della plasticità . . . 44
- 5.4 Considerazioni sulla scelta del materiale . . . 46
- 5.5 Pannelli irrigiditi e messi a dieta . . . 46
  - 5.5.1 Determinazione di b ottimo assoluto ($\alpha = \alpha_{max}$ . . . 48
  - 5.5.2 Fissato in qualche modo b, si disegna la geometria ottimale della sezione . . . 48
- 5.6 Cèntine . . . 49

5.6.1 Le cèntine di forma, dimensionate a rigidezza, usate per ridurre la lunghezza libera d'inflessione dei pannelli alari . . . 50
5.6.2 Dimensionamento a robustezza delle cèntine . . . 51
5.6.3 Insomma, come scegliere $\overline{t}_{rib}$? . . . 51
5.6.4 Crushingdella cèntina . . . 51
5.7 Non di sole cèntine è fatto un cassone . . . 52
5.8 Fusoliere: anche i cilindri circolari sono instabili, ma non ditelo a chi vola in prima classe . . . 53

6 Carichi sugli aeroplani **54**
6.1 Pillole introduttive . . . 54
6.2 Carichi da manovre . . . 55
6.3 Carichi da raffiche . . . 56
6.3.1 Descrizione statistica delle raffiche . . . 59
6.4 Come sono distribuiti i carichi lungo l'ala . . . 60
6.5 Carichi del suolo . . . 60

Capitolo 1

Campo di tensione diagonale

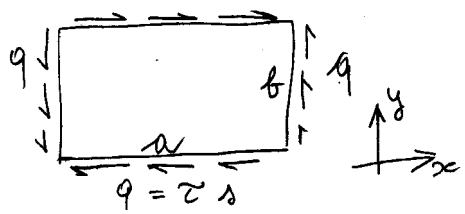


Figura 1.1: Schema del pannello

Un pannello (fig. 1.1) di dimensioni $a \times b \times s$ è soggetto a una distribuzione uniforme di tensione $\tau = q/s$.

Scopo dell'analisi è alzare il carico di collasso, ovvero far lavorare il pannello in condizioni post-critiche.

Analisi del pannello: si hanno omogeneamente

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = \tau = q/s$$

Se $\tau > \tau_{cr}$ nel pannello diventano evidenti ondulazioni lungo $\overline{x}$. Il riferimento $(\overline{x}, \overline{y})$ in fig. 1.2 è principale, quindi:

$$\tau_{\overline{x}\overline{y}} = \gamma_{\overline{x}\overline{y}} = 0 \quad \text{per definizione}$$
$$\sigma_{\overline{x}} = \tau$$
$$\sigma_{\overline{y}} = -\tau$$

L'asse $\overline{x}$ è la direzione delle linee isostatiche. Una formula accreditata per τ_{cr} è

$$\tau_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} K_s \left(\frac{s}{b}\right)^2$$

in cui: E modulo di Young; ν coefficiente di Poisson; $K_s = f(a/b, vincoli)$. Il campo di tensione finora descritto è detto *tangenziale* (fig. 1.3).

Rimedio: visto che $\tau_{cr} < \sigma_{snervamento}$, sarebbe bello bloccare $\sigma_{\overline{y}} \equiv -\tau_{cr}$ per non fare insorgere l'instabilità e permettere a $\sigma_{\overline{x}}$ di crescere ancòra (magari, fino a $\sigma_{snervamento}$). Questo è detto *campo di tensione diagonale* (fig. 1.4) ed in linea teorica è ottenibile riquadrando il pannello con irrigidimenti

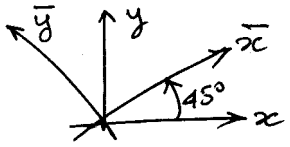


Figura 1.2: Riferimento principale

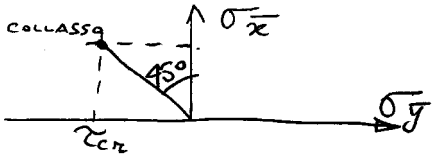


Figura 1.3: Descrizione del campo di tensione tangenziale

ideali, tali da risultare scarichi fino a τ_{cr}; successivamente, questi ricevono i carichi in eccesso lungo x e y, a partire da $\sigma_{\overline{y}} = -\tau_{cr}$ in poi (codesti correnti reggono solo sforzi normali alla propria sezione). L'aggiunta dei riquadri però fà sì che il riferimento principale $(\overline{x}, \overline{y})$ sia ruotato rispetto a (x, y) di

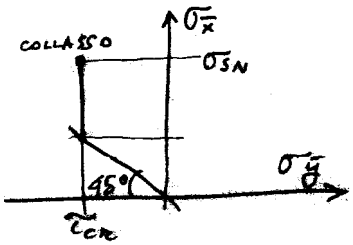


Figura 1.4: Descrizione del campo di tensione diagonale

un angolo generico $\alpha \neq 45°$.

Data la matrice di rotazione $R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, si possono trasformare le tensioni da un riferimento all'altro tramite:[1]

$$T = R(\overline{T}R^{-1}) \quad \overline{T} = R^{-1}(TR)$$

Per $\alpha = 45°$ (campo tangenziale) risulta dunque, come già esposto:

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{T} = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix}$$

Campo diagonale: Ammettiamo allora che, grazie ai riquadri, si abbia

$$\sigma_{\overline{x}} = \overline{\sigma} > \tau_{cr} \quad \text{in cui} \quad \overline{\sigma} = \tau_{cr} + \Delta\sigma$$
$$\sigma_{\overline{y}} = -\tau_{cr}$$
$$\tau_{\overline{xy}} = 0$$

[1] Le matrici di rotazione sono ortogonali e perciò la loro inversa coincide colla trasposta.

	Tangenziale	Diagonale
(x, y)	$\sigma_x = 0$ $\sigma_y = 0$ $\tau_{xy} = \tau \leq \tau_{cr}$	$\sigma_x = \frac{q}{s}\cot\alpha - \tau_{cr}$ $\sigma_y = \frac{q}{s}\tan\alpha - \tau_{cr}$ $\tau_{xy} = \frac{q}{s}$
$(\overline{x}, \overline{y})$	$\sigma_{\overline{x}} = \tau$ $\sigma_{\overline{y}} = -\tau$ $\tau_{\overline{xy}} = 0$	$\sigma_{\overline{x}} = \frac{q}{s \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} - \tau_{cr}$ $\sigma_{\overline{y}} = -\tau_{cr}$ $\tau_{\overline{xy}} = 0$

Tabella 1.1: Caratteristiche dei campi tangenziale e diagonale

Il campo diagonale sta tutto in queste equazioni. Ritornando al sistema naturale tramite $T = R\overline{T}R^{-1}$, si ha

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \overline{\sigma}\cos^2\alpha - \tau_{cr}\operatorname{sen}^2\alpha \\
\sigma_y &= \overline{\sigma}\operatorname{sen}^2\alpha - \tau_{cr}\cos^2\alpha \\
\tau_{xy} &= q/s = (\overline{\sigma} + \tau_{cr})\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha
\end{aligned}$$

ovvero, eliminando la dipendenza esplicita da $\overline{\sigma}$ riducendo tutto al flusso q:

$$\begin{aligned}
q &= (\overline{\sigma} + \tau_{cr})s\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\
\therefore \overline{\sigma} &= \frac{q}{s\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} - \tau_{cr}
\end{aligned}$$

Si ottengono le equazioni che si trovano in tab. 1.1. Rispetto al campo tangenziale il flusso q è più grande per ipotesi a causa del sovraccarico $\Delta\sigma$ contenuto in $\overline{\sigma}$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{q}{s}\cot\alpha - \tau_{cr} \\
\sigma_y &= \frac{q}{s}\tan\alpha - \tau_{cr}
\end{aligned}$$

Campo diagonale completo: se $\Delta\sigma$ è molto grande, allora si semplificano

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma} &\approx \Delta\sigma \\
\tau_{cr} &\approx 0
\end{aligned}$$

e valgono le formule della tabella 1.2 anziché della 1.1. Con quest'ultima approssimazione si sottintende a tutti gli effetti un materiale che non è più isotropo:

$$\begin{aligned}
E &\quad \text{lungo } \overline{x}, \\
E = 0 &\quad \text{lungo } \overline{y}.
\end{aligned}$$

1.1 Calcolo delle deformazioni

Viene effettuato col teorema dei lavori virtuali imponendo che il lavoro L_{est} delle forze esterne sia uguale al lavoro mutuo L_{int} delle tensioni interne effettive e virtuali.

(x, y)	$\sigma_x = \Delta\sigma \cos^2\alpha = \frac{q}{s}\cot\alpha$ $\sigma_y = \Delta\sigma \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{q}{s}\tan\alpha$ $\tau_{cr} = \Delta\sigma \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{q}{s}$
$(\overline{x}, \overline{y})$	$\sigma_{\overline{x}} = \Delta\sigma = \frac{q}{s \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$ $\sigma_{\overline{y}} = 0$ $\tau_{\overline{xy}} = 0$

Tabella 1.2: Campo diagonale completo

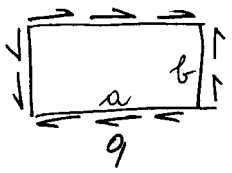


Figura 1.5: Campo tangenziale: $q_{espl} = \tau_{espl} s \stackrel{\triangle}{=} 1/b$, $q_{eff} = \tau_{xy} s$

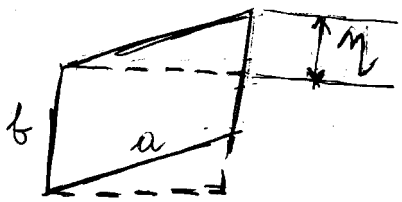


Figura 1.6: Deformata assunta del pannello: si ipotizza di vincolare il lato sinistro, permettendo al destro di spostarsi *virtualmente* di η

In campo tangenziale (fig. 1.5): qualitativamente la deformazione assunta del pannello è quella di figura 1.6. I lavori risultano:

$$L_{est} = \text{forza} \times \text{spostamento} = \left(b\,\frac{1}{b}\right)\,\eta$$

$$L_{int} = \int_{volume} \gamma_{eff}\,\tau_{espl}\,dV = abs\,\frac{\tau_{eff}}{G}\,\tau_{espl} = abs\,\frac{q}{sG}\,\frac{1}{bs} = \frac{a\,q_{eff}}{Gs}$$

perciò nel semplice caso di campo tangenziale è

$$\eta = \frac{a\,q_{eff}}{Gs}$$

Deformazioni in campo diagonale completo, con riquadri (fig. 1.7):

Pel sistema esplorativo, dalle relazioni per c.d.c., (x, y), tab. 1.2:

$$\sigma_{x_{espl}} = \frac{1}{bs}\cot\alpha$$
$$\sigma_{y_{espl}} = \frac{1}{bs}\tan\alpha$$
$$\tau_{espl} = \frac{1}{bs}$$

e dalla relazione per c.d.c, $(\overline{x}, \overline{y})$, tab. 1.2:

$$\sigma_{\overline{x}_{espl}} = \frac{1}{bs\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

Pel sistema effettivo, dalle relazioni per c.d.c., (x, y), (x, y), tab. 1.2:

$$\sigma_{x_{eff}} = \frac{q_{eff}}{s}\cot\alpha$$
$$\sigma_{y_{eff}} = \frac{q_{eff}}{s}\tan\alpha$$

e dalla relazione per c.d.c, $(\overline{x}, \overline{y})$, (x, y), tab. 1.2:

$$\sigma_{\overline{x}_{eff}} = \frac{q_{eff}}{s\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}$$

È chiaro che il sistema (x, y) è usato convenientemente per calcolare lo sforzo lungo x e y nella lamiera *e quindi anche nei correnti.* Il sistema $(\overline{x}, \overline{y})$ è più utile per calcolare il lavoro interno alla lamiera.

Lo sforzo nei correnti è uguale ed opposto a quello esercitato dalla lamiera, quindi:

$$L_{\substack{int\\lam}} = \frac{1}{2E}(\text{volume lamiera})\,\sigma_{\overline{x}_{espl}}\sigma_{\overline{x}_{eff}} = \frac{abs}{E}\frac{1}{bs\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}\frac{q_{eff}}{s\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha} = \frac{q_{eff}a}{Es\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$\begin{aligned}
L_{\substack{int\\correnti\ x}} &= \frac{2}{E}(\text{volume di 1 corr. } x)\,\sigma_{\substack{\text{corrente } x\\espl}}\,\sigma_{\substack{\text{corrente } x\\eff}}\\
&= \frac{2}{E}\frac{abs}{2\rho_x}\frac{\text{forza } x \text{ lamiera, espl}}{Area_x}\frac{\text{forza } x \text{ lamiera, eff}}{Area_x}\\
&= 2\frac{abs}{\rho_x E}\frac{\sigma_{x_{espl}}bs}{2\frac{bs}{2\rho_x}}\frac{\sigma_{x_{eff}}bs}{2\frac{bs}{2\rho_x}}\\
&= \frac{abs}{2E}\rho_x\sigma_{x_{espl}}\sigma_{x_{eff}}\\
&= \frac{abs}{2E}\rho_x\frac{\cot\alpha}{bs}\frac{q_{eff}}{s}\cot\alpha\\
&= \frac{q_{eff}a}{2Es}\cot^2\alpha\rho_x
\end{aligned}$$

Similmente lungo y:

$$L_{\substack{int\\correnti\ y}} = \frac{q_{eff}a}{2Es}\tan^2\alpha\rho_y$$

La deformazione risultante è (dovendo essere $L_{int} = L_{est}$):

$$\eta = \frac{q_{eff}a}{Es}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} + \rho_x\cot^2\alpha + \rho_y\tan^2\alpha\right) \tag{1.1}$$

in cui però resta ancora l'incognita α.

Lo sforzo nei riquadri, così come precedentemente calcolato, è da intendersi di compressione, per quelli lungo x e per quelli lungo y. Perciò l'azione sulla lamiera è di compressione (di contenimento), come in figura 1.8.

1.2 Calcolo dell'orientamento α del nuovo sistema di assi

Si effettua sempre con la tecnica dei lavori virtuali: **"eff"** resta quello descritto, ma il sistema **"espl"** è definito da:

$$\sigma_{\overline{x}} = \sigma_{\overline{y}} = 0$$
$$\tau_{\overline{xy}} = 1$$

e questo è tutto quel che c'è di concettualmente nuovo in questo §1.2. Dalla relazione $T = R\overline{T}R^{-1}$ si ottiene

$$\sigma_x = -2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = -\sigma_y$$
$$\tau_{xy} = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

I riquadri debbono reggere lo sforzo della lamiera, il quale vale nel sistema esplorativo:

$$\text{lungo } x = \sigma_{x_{espl}} b s = -2 b s \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$
$$\text{lungo } y = \sigma_{y_{espl}} a s = +2 a s \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

Il mutuo lavoro virtuale dei correnti è:

$$L_{\substack{int \\ corr\ x}} = \frac{2}{E}\frac{abs}{2\rho_x}\frac{-2bs \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\frac{bs}{2\rho_x}}\frac{\frac{q_{eff}}{s}\cot\alpha}{2\frac{bs}{2\rho_x}}bs = -ab\frac{\rho_x}{E}q_{eff}\cos^2\alpha$$
$$L_{\substack{int \\ corr\ y}} = ab\frac{\rho_y}{E}q_{eff}\operatorname{sen}^2\alpha$$

Il lavoro virtuale interno mutuo della lamiera è invece nullo perché

$$\sigma_{\overline{x}_{eff}}\sigma_{x_{espl}} = 0$$
$$\tau_{\overline{xy}}\tau_{xy_{espl}} = 0$$

Il lavoro esterno, considerando una deformazione del tipo descritto in §1.1, è:

$$L_{est} = b\,\eta\,q_{espl} = s\;b\,\tau_{xy_{espl}}\eta = b\;s\;\eta\;(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)$$

A questo punto, sostituendo per η il valore già trovato a meno di α in (1.1) e eguagliando $L_{est} = L_{\substack{int \\ corr\ x}} + L_{\substack{int \\ corr\ y}}$ si ottiene α implicitamente definita da

$$\cos(2\alpha) = \rho_y \operatorname{sen}^4\alpha - \rho_x \cos^4\alpha$$

Risulta che $\alpha = 45°$ solo se gli irrigidimenti sono infinitamente rigidi ($\rho_x = \rho_y = 0$) oppure se mancano del tutto (trattazione precedente del campo tangenziale).

1.3 Osservazioni sugli irrigidimenti: la trave di Wagner

Un pannello riquadrato come quello finora esaminato è tipicamente usato nei longheroni e nelle cèntine, che sono elementi ai quali è consentito l'imbozzamento perché le superfici non sono aerodinamiche. Un pannello non viene mai usato isolato; esso funziona inserito in una "trave di Wagner" che, nel caso della fig. 1.13, è caricata come un longherone.

Sì'è visto che lavorando in campo post-critico (ovvero con campo di tensione diagonale), la lamiera è compressa/tesa lungo x e y, differentemente da quanto avviene in campo tangenziale (tabelle 1.1 e 1.2). Vuol dire che in una struttura del tipo in fig. 1.9, la flangia (che già subisce i carichi concentrati verticali trasmessi dai montanti) è anche sottoposta dalla lamiera ad una trazione uniforme. Siccome questa non agisce esattamente sull'asse neutro della flangia AB , ciò equivale a sovrapporvi un momento flettente secondario distribuito a farfalla (fig. 1.10). A sua volta, la flangia AB è compressa (mentre quella CD è tesa) dal carico esterno: il risultato è (fig. 1.11) che la parte inferiore della sezione della flangia AB è sollecitata a compressione più del previsto senza il campo di tensione diagonale. Un rimedio può essere la modifica della geometria (fig. 1.12).

Il risultato netto è una diminuzione della rigidezza; cfr. §4.8.3.

Invece i montanti, compressi dalle flangie, possono risultare parzialmente alleviati dal campo diagonale.

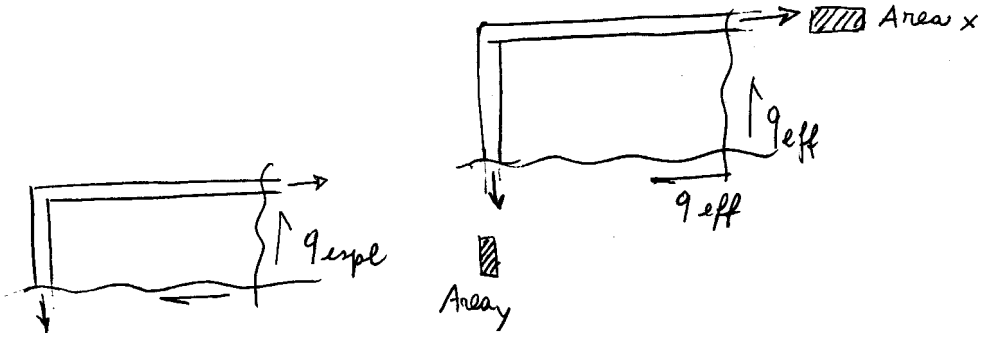
Alle tensioni ottenute con una analisi di tipo trave:

$$\sigma_x = \frac{M}{J_x} y = \pm \frac{3Fa}{J_x} \frac{b}{2}$$

(la flangia superiore è compressa, quella inferiore è tesa) vanno aggiunte quelle derivanti da un'analisi in campo diagonale fatta con $q = F/b$.

Queste sono di due tipi. Innanzitutto gli irrigidimenti sono compressi dal campo diagonale e quindi la flangia superiore è aggravata, mentre quella inferiore è alleviata, rispetto alle tensioni di tipo trave. Essendo poi, pello stesso motivo, anche i montanti compressi, le flange risultano caricate come in fig. 1.14, in cui i carichi concentrati provengono dai montanti mentre quelli distribuiti sono la trazione esercitata dalla piastra ad equilibrare la compressione dei montanti.

Conseguentemente, attorno all'asse neutro di ciascuna flangia agisce un momento flettente secondario (fig. 1.15) (massimo agli appoggi) che comprime ulteriormente le fibre superiori e tende quelle inferiori (l'opposto accade pella flangia inferiore). È allora possibile sommare i diversi contributi (fig. 1.16).



(a) sistema ESPLorativo (b) sistema EFFettivo

Figura 1.7: Campo diagonale completo: $q_{espl} = 1/b$, $q_{eff} = \tau_{eff} s$; sezioni di ciascun irrigidimento: $Area_y = \frac{as}{2\rho_y}$, $Area_x = \frac{bs}{2\rho_x}$

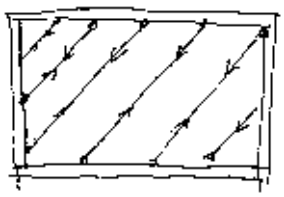


Figura 1.8: L'azione di contenimento dei riquadri sulla lamiera

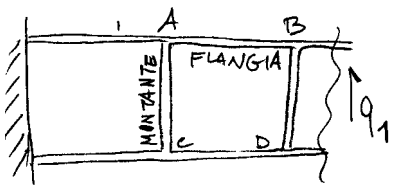


Figura 1.9: $q_q > q_{cr}$

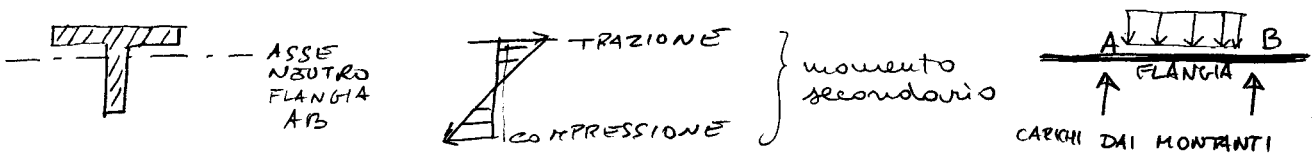


Figura 1.10: Momento flettente secondario attorno all'asse neutro della flangia

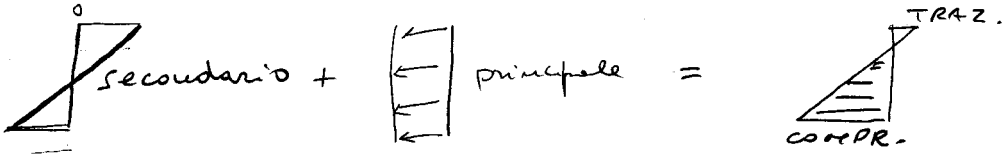


Figura 1.11: Caratteristiche della sollecitazione della flangia AB

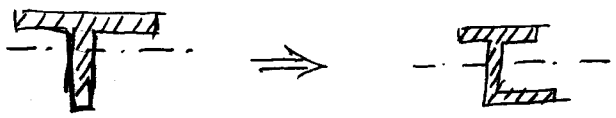


Figura 1.12: ‘‘Sezione di Wagner’’

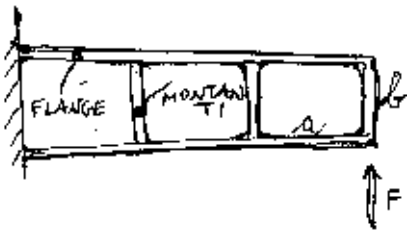


Figura 1.13: Trave di Wagner caricata come un longherone

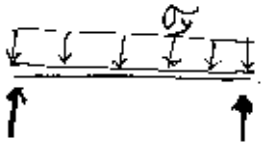


Figura 1.14: Carichi sulla flangia superiore

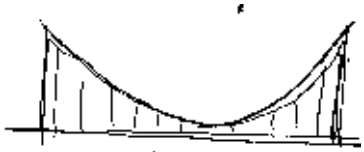


Figura 1.15: Momento flettente secondario agente sulla flangia

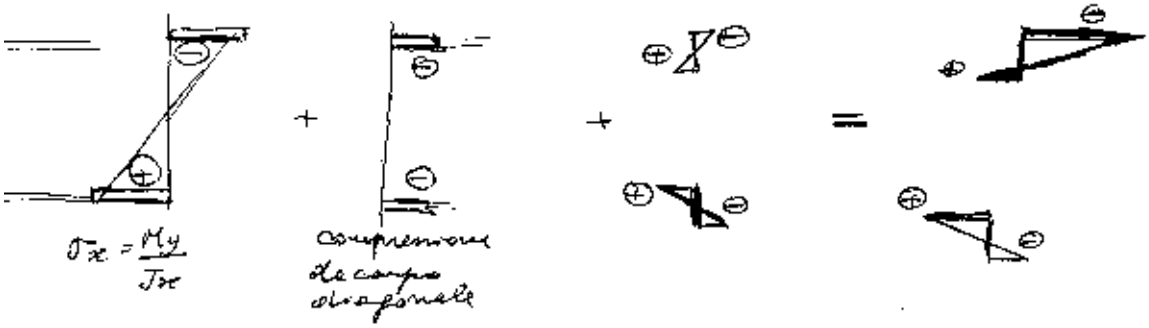


Figura 1.16: Il risultato della sovrapposizione è che ciascuna flangia risulta caricata attorno al proprio asse neutro da una ‘‘farfalla’’ molto squilibrata (non volerà mai!)

Capitolo 2

Palloncini gonfiabili *ovvero* tensioni membranali in recipienti sotto pressione

I palloncini di gomma non hanno rigidità flessionale, bensì solo quella a trazione (si comportano, cioè, da membrana); questo è il modo più *efficiente* per resistere alla pressione interna, che è uniforme; la forma variabile (non sferica) del palloncino è quindi dovuta alla resistenza, localmente variabile, del materiale (es.: aumenti di spessore).

Nei gusci di rilevanza ingegneristica (come le fusoliere) c'è "un po'" di rigidità flessionale, ma la configurazione *efficiente* deve minimizzarla. Tuttavia si noti che una fusoliera vera non solo non è assialsimmetrica, ma è pure caricata diversamente: come una *trave* incastrata all'altezza dell'ala. Va da sé allora che un'analisi del genere può essere utile solo per esaminare i carichi di pressurizzazione.

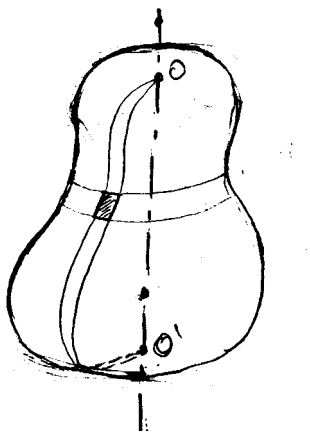


Figura 2.1: Corpo assialsimmetrico di rotazione

Studiamo un corpo generato per rotazione attorno ad un asse (figg. 2.1, 2.2). Siano:

R_m raggio di curvatura di un meridiano, ovvero della sezione tagliata da un piano meridiano; varia da punto a punto su uno stesso meridiano, è negativo dove questo è concavo verso l'esterno ed è infinito nei punti di flesso e nei tratti rettilinei;

R_t raggio di curvatura di una delle sezioni tagliate da un piano localmente normale al meridiano corrispondente; è sempre positivo pei corpi assialsimmetrici.

Gli sforzi di taglio non esistono per via della assialsimmetria, *che per ipotesi riguarda anche la*

pressione interna p (più solitamente uniforme); ciò rende immediata l'individuazione delle direzioni principali e perciò degli sforzi massimi, che sono quelli nelle direzioni m e t.

2.1 Forze

L'equilibrio in direzione normale a un elemento infinitesimo dà

$$2N_m \frac{dS_m}{2R_m} dS_t + 2N_t \frac{dS_t}{2R_t} dS_m - p\, dS_m\, dS_t = 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{N_m}{R_m} + \frac{N_t}{R_t} = p}$$

Ivi le incognite sono due: N_m, N_t. L'equilibrio lungo OO' di una delle due parti del contenitore tagliato da un parallelo dà:

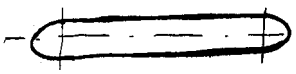
$$2\pi R_t\, N_m = p\, \pi R_t^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{N_m}{R_t} = \frac{p}{2}} \tag{2.1}$$

Il problema è dunque staticamente determinato. Osserviamo che codeste equazioni non valgono se il corpo non è chiuso.

2.2 Esempi notevoli

2.2.1 Raccordo perfetto

Il raccordo tra cilindro e semisfere è perfetto: 

$$R_0 = R_t\Big|_{cil} = R_t\Big|_{sem}$$

$$R_m\Big|_{cil} = \infty$$

$$\therefore N_t\Big|_{sem} = N_m\Big|_{sem} = N_m\Big|_{cil} = \frac{R_0 p}{2}$$

$$N_t\Big|_{cil} = R_0 p$$

Quindi all'intersezione tra semisfera e cilindro non c'è discontinuità di N_m, né in modulo né in direzione; questo garantisce uno stress membranale (efficiente). (Tuttavia la discontinuità di N_t può creare problemi se prestiamo attenzione alle deformazioni relative.) Diversamente nel caso che segue.

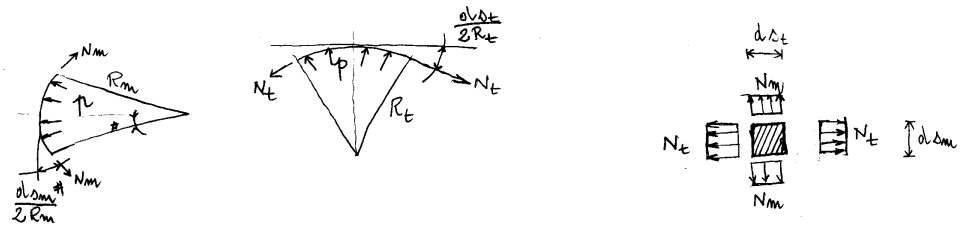


Figura 2.2: Vista di una sezione meridiana e di una sezione normale a un meridiano; forze agenti su un elementino di superficie --- N_t, N_m hanno le dimensioni di un flusso di taglio: [forza/lunghezza]

2.2.2 Bulkhead

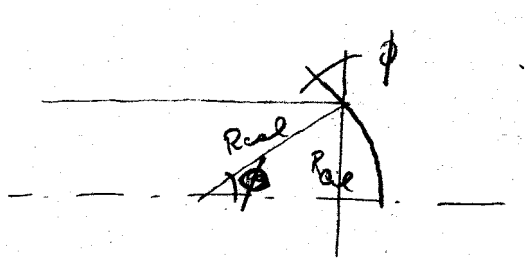


Figura 2.3: Copertura di estremità di raggio generico

La copertura di estremità (bulkhead, fig. 2.3) qui è sempre una calotta sferica, ma con raggi

$$\infty = R_m\Big|_{cil} > R_m\Big|_{cal} = R_t\Big|_{cal} > R_t\Big|_{cil} = R_0$$

Dai risultati precedenti:

$$N_t\Big|_{cil} = p\, R_{cil}$$
$$N_t\Big|_{cal} = \frac{p}{2} R_{cal}$$

perciò si possono rendere uniformi le tensioni tangenziali scegliendo i raggi (ma vedi §2.3). Per la tensione lungo i meridiani risulta:

$$N_m\Big|_{cil} = \frac{p}{2} R_{cil}$$
$$N_m\Big|_{cal} = \frac{p}{2} R_{cal}$$

Dunque le tensioni sono uguali in modulo e direzione solo se $R_{cil} = R_{cal}$ (§2.2.1). Più genericamente si ha la situazione di figura 2.3 in cui

$$R_{cal} \operatorname{sen}\phi = R_{cil}$$

e quindi

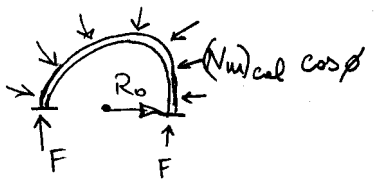
$$N_m\Big|_{cil} = \frac{p}{2} \operatorname{sen}\phi$$
$$N_m\Big|_{cal} = \frac{p}{2} R_{cal}$$

L'equilibrio lungo l'asse OO' è sempre soddisfatto da un campo membranale perché basta che sia

$$N_m\Big|_{cil} = N_m\Big|_{cal} \operatorname{sen}\phi$$

Invece l'equilibrio radiale è mantenuto solo aggiungendo un anello di rinforzo[1] (che arreca inefficienza ponderale) per sostenere le componenti radiali di discontinuità negli sforzi; questo anello risulta solo compresso radialmente (come teso da una pelle di tamburo) da $\left[N_t\Big|_{cal} = N_m\Big|_{cal}\right] \times \cos\phi$ e quindi

[1] In altre parole, questa forma non è compatibile con un campo di tensione membranale — nessun bambino potrà giocare con un palloncino di questa forma!

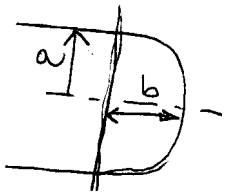


ciascuna delle sue sezioni è compressa da una forza F calcolabile con una semplice equazione di equilibrio:

$$2F = 2R_0 \left[N_m\Big|_{cal} \cos\phi \right]$$

2.2.3 Calotta ellittica con $\phi = 0$

Differentemente dal caso precedente, tra cilindro e calotta non c'è discontinuità di direzione nella tensione e quindi non serve un anello. Resta il problema di determinare N_m e N_t nella calotta, ed è solo geometrico:



È importante il risultato che si ottiene alla giunzione:

$$N_m\Big|_{cal} = \frac{p\,a}{2} \qquad \text{come pella calotta sferica}$$

$$N_t\Big|_{cal} = p\left(1 - \frac{a^2}{2b^2}\right) a$$

Ciò mostra l'indesiderabilità di $a^2 > 2b^2$, che comporta eccessive differenze nelle deformazioni del cilindro e della calotta.

2.3 Un'analisi delle deformazioni rivela che...

Anche nel caso "favorevole" di calotta sferica si ha, alla giunzione, una diversa espansione radiale:

$$\epsilon_t\Big|_{cil} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_m) = \frac{1}{E\,t}(N_t - \nu N_m) = \frac{R_0 p}{E\,t}\,(1 - \nu/2)$$

$$\epsilon_t\Big|_{sfe} = \frac{1}{E\,t}(R_0 p - \nu R_0 p) = \frac{R_0 p}{E\,t}(1 - \nu)$$

in cui t è lo spessore. Ovvero, il cilindro tende a espandersi più della sfera; ciò è impedito dalla giunzione tra le due superfici e questo provoca momenti flettenti nel cilindro, i quali hanno la forma ondulazioni e che perciò portano picchi di tensione che si sovrappongono alla tensione media data da un'analisi di prima approssimazione, in cui guscio≈membrana. Questi picchi non possono essere trascurati in una analisi a fatica.

Volendo risolvere il problema aumentando il raggio della sfera, non si avrebbe più quella favorevole continuità di σ vista precedentemente. Perciò è all'interfaccia cal/cil che si ha la sezione dimensionante: qui non si ha lo stato membranale. Una situazione del genere si trova intorno alle ordinate che pure, come la calotta, ostacolano l'espansione radiale del cilindro.

In altre parole, tutta l'analisi di questo capitolo ha senso solo se intesa applicata *ad una parte* delle sollecitazioni (quelle membranali). In questa ottica, essa può fornire solo una parte della soluzione, *non congruente.* Il caso del cilindro chiuso dalle due calotte sferiche è ancora una volta esemplare: non esiste una soluzione al problema se ci si limita a N_m e a N_t. La limitazione del modello matematico sta nel voler assegnare nello stesso tempo la soluzione nelle sollecitazioni (se si pretende che solo N_m e N_t siano non nulle) e nelle deformazioni (ovvero nella forma di cilindro più calotta).

2.4 La perturbazione introdotta dalle ordinate nel campo membranale

Servono le equazioni per quelle zone in cui lo stato di tensione non è più membranale e occorre considerare la rigidezza flessionale, cioè aggiungere a N_m e N_t anche il taglio Q e il momento flettente M. Con riferimento alla fig. 2.4, scriviamo tre equazioni di equilibrio:

1. alla rotazione attorno alla tangente a ciascuna circonferenza:

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x}$$

(come in una trave, il taglio è uguale alla derivata del momento cambiata di segno)

2. alla traslazione lungo l'asse x:

$$\frac{\partial N_m}{\partial x} = 0$$

3. alla traslazione in direzione radiale (fig. 2.5):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} R\, d\phi\, dx - N_t\, d\phi\, dx + p\, R\, d\phi\, dx + N_m \frac{d^2 w}{dx^2} R\, d\phi\, dx = 0$$

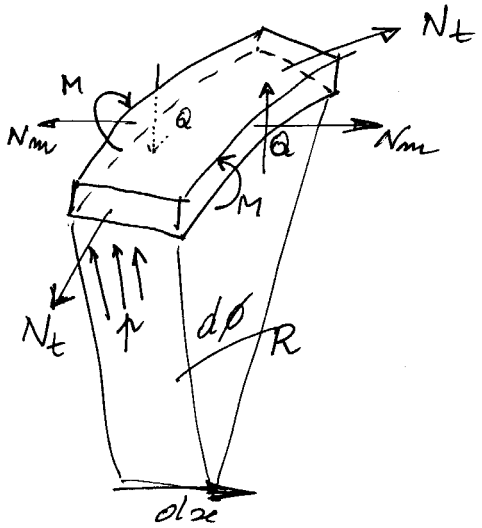


Figura 2.4: M, N_m, Q, N_t `sono sollecitazioni per lunghezza d'arco unitaria`

Potendo esprimere M proporzionalmente alla rigidezza flessionale $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$:

$$M = -D\frac{d^2 w}{dx^2}$$

dalle tre equazioni di equilibrio si ottiene l'equazione della linea elastica:

$$-D\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{N_t}{R} + N_m \frac{d^2 w}{dx^2} = -p$$

È scritta in termini dello spostamento w, ma anche N_t modifica w. Perciò un'altra relazione utile si ottiene dalle deformazioni:

$$\epsilon_t = \frac{w}{R}$$

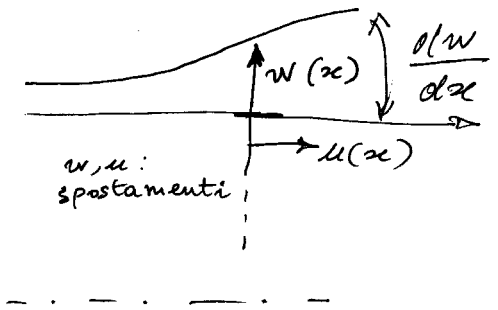


Figura 2.5: Spostamenti radiale e assiale w e u; risulta evidente dalla figura che la variazione angolare tra x e $x + dx$ vale $\frac{d^2w}{dx^2}$

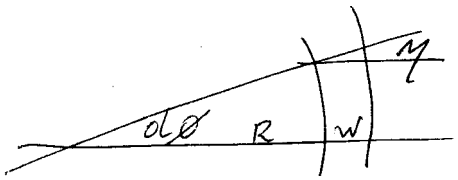


Figura 2.6: Per simmetria, lo spostamento v circonferenziale è nullo

Per spiegarla ci riferiamo alla fig. 2.6 dalla quale

$$\epsilon_t = \frac{\eta}{R\,d\phi} = \frac{w\,d\phi}{R\,d\phi} = \frac{w}{R}$$

che permette di scrivere

$$\epsilon_t = \frac{1}{Et}(N_t - \nu\, N_m) = \frac{w}{R}$$
$$\therefore N_t = \frac{wEt}{R} - \nu\, N_m$$

L'equazione finale che si ottiene governa il comportamento di un guscio cilindrico vincolato in modo assialsimmetrico:

$$\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{N_m}{D}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{wEt}{R^2D} = \frac{p}{D} + \frac{\nu\, N_m}{RD} \tag{2.2}$$

Ponendo

$$g = -\frac{N_m}{D} \quad c = \frac{Et}{R^2D}$$

l'equazione omogenea associata è detta biquadratica:

$$w^{(4)} + g\,w'' + c\,w = 0$$

Vista la natura non divergente del problema, la soluzione è

$$w(x) = \overline{w} + \alpha\, e^{-r_1 x} + \beta\, e^{-r_2 x}$$

r_1 e r_2 si determinano da

$$r^4 + gr^2 + c = 0$$
$$r^2_{1/2} = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - 4c}}{2}$$

$\overline{w}$ è l'espansione radiale all'infinito (molto lontano da un'ordinata); si ottiene dalla (2.2) scegliendo w =costante:

$$\frac{\overline{w}Et}{R^2D} = \frac{p}{D} + \frac{\nu N_m}{RD}$$
$$\therefore \overline{w} = \left(p + \frac{\nu N_m}{R}\right)\frac{R^2}{Et}$$

Per un piccolo aereo da trasporto (es. ATR42) valori tipici sono:

$$R = 1.5\text{m} \quad t = 1\text{mm} \quad p = 0.7\text{Atm} = 0.7\ \text{kg}_f/\text{cm}^2 \quad E = 700\ \text{kg}/\text{mm}^2$$

Risulta $\overline{w} = 2$mm. I passi usati tra le ordinate consentono di considerarle isolate e di raggiungere la

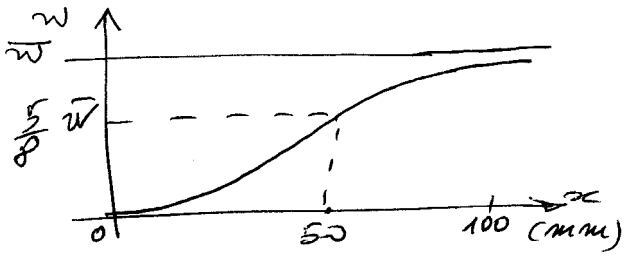


Figura 2.7: Andamento qualitativo dell'espansione radiale del rivestimento, tra l'ordinata (a sinistra) e all'infinito

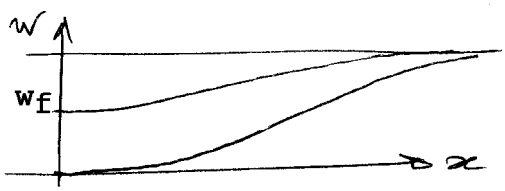


Figura 2.8: Confronto tra le deformata con l'ordinata cedevole e con quella rigida

soluzione asintotica. Nella fig. 2.7 è mostrato il caso con le condizioni al contorno $w(0) = w'(0) = 0$ riferite a un'ordinata infinitamente rigida.

Le ordinate sono necessarie per introdurre carichi concentrati, per la stabilità della forma, per il crack-arrest. Per quanto esse rovinino l'efficienza del rivestimento, una volta inserite per i motivi precedenti reggono una parte del carico di pressurizzazione; perciò è più realistico pensare a un'ordinata parzialmente cedevole, di condizioni al contorno $w(0) = w_f$, $w'(0) = 0$ (tipicamente $w_f = 1$mm), fig 2.8.

Visto che $M = -Dw''$, la cedevolezza dell'ordinata allevia la curvatura del guscio e gioca a suo favore. Per quanto riguarda N_m e N_t, la perturbazione delle ordinate riguarda soprattutto N_m, come è pure intuibile dalla (2.1). N_t viene leggermente alleviata.

2.5 I Fori Neutri *(ci sono e non ci sono)*

Se si fa un buco in una lamiera, lo stato di tensione circostante cambia. Se si vuole lavorare con tensioni membranali (cap. 2), la perturbazione di tensioni introdotte da un finestrino e da una porta non è desiderabile perché, allontanandosi dalla membrana, il materiale lavora in modo meno efficiente.

Lo scopo del progettista è rendere neutro il foro, circondandolo con elementi di rinforzo che abbiano lo scopo di sostituire la parte mancante di materiale dal punto di vista delle tensioni e la caratteristica (ideale) di essere completamente flessibili (nessuna rigidezza flessionale). Analiticamente questo equivale a determinare quali forze applicherebbe la parte di pannello-che-non-c'è alla struttura circostante e ad applicare un insieme *autoequilibrato* di forze uguali ed opposte (ogni elemento del pannello è in equilibrio statico).

Per esempio, rimuoviamo da un cilindro in pressione un rettangolo per alloggiarvi un finestrino e consideriamo solo le tensioni circonferenziali nel piano (x, y) , fig. 2.9. Al posto del pannello cilindrico viene inserito un finestrino piano.

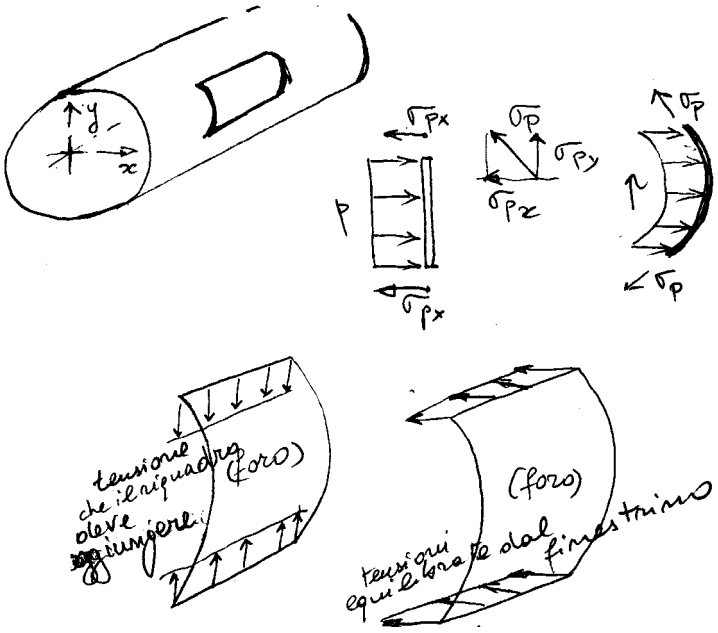


Figura 2.9: Equilibrio della parte mancante di pannello

La pressione che agisce sul finestrino equilibra σ_{p_x}; le restanti tensioni σ_{p_y} debbono essere annullate dal riquadro del finestrino, che ha dunque la sola funzione di annullare le tensioni dirette come la corda della circonferenza.

Ovviamente, tutto ciò soltanto in teoria: non solo non è possibile usare un solo riquadro (nella pratica viene irrigidita un'ampia zona attorno al foro), ma nemmeno è possibile davvero conservare lo stato membranale di tensione.

2.5.1 Il caso più semplice, ovviamente di nessun interesse pratico

È quello di una lamiera uniformemente tesa (o compressa) lungo le due *direzioni principali* — quindi lungo tutte le direzioni con σ_0 — forata con un cerchio che — *è intuitivo* — basterà sostituire con un rinforzo ad anello di rigidezza appropriata: quale?

Shell theory attempts the impossible: to provide a two-dimensional representation of an intrinsically three-dimensional phenomenon.
W. Koiter, J. Simmonds

Tornano utili le seguenti equazioni per una membrana, in cui è facile intuire che ν indica quanto

si restringe trasversalmente un filamento tirato longitudinalmente. Per le deformazioni lineari:

$$\epsilon_x = \frac{1}{Et}(T_x - \nu T_y)$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{Et}(T_y - \nu T_x)$$

dove T è la forza per unità di lunghezza (fig. 2.10), t lo spessore e dunque $T/t = \sigma$. Siccome $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$, la deformazione lungo ciascuna direzione vale:

$$\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}(1 - \nu)$$

Per la deformazione angolare:

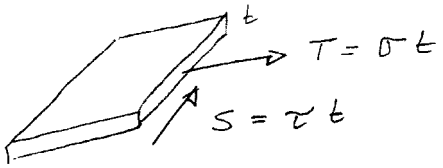


Figura 2.10: `T: tensione, S: taglio`

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{Et}S = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

ma in questo caso $\gamma_0 = 0$, perché $\tau_{xy} = 0$ uniformemente.

Se allora l'anello di rinforzo (di sezione A) è teso da una forza T uniformemente distribuita su A, bisogna sognare un anello di estensione radiale trascurabile, assolutamente irreale; in questo caso, eguagliando le deformazioni:

$$\epsilon_{anello} = \frac{T}{AE}$$
$$\epsilon_{lamiera} = \frac{\sigma_0}{E}(1 - \nu)$$

Si ottiene

$$T = A\sigma_0(1 - \nu) \tag{2.3}$$

Resta l'incognita A.

È superfluo impostare un'equazione di equilibrio di forze. Energeticamente, l'energia elastica della parte di lamiera mancante è:

$$\mathcal{E}_{foro} = V_{foro}\sigma_0\epsilon_0$$

infatti la tensione è biassiale uniforme e $2 \times \frac{1}{2} = 1$.[2] Invece per l'anello, in tensione monoassiale, resta 1/2:

$$\mathcal{E}_{anello} = \frac{1}{2}V_{anello}\frac{T}{A}\frac{T}{AE}$$

Essendo i volumi (fig. 2.11)

[2] Per ogni asse, $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\sigma\epsilon$.

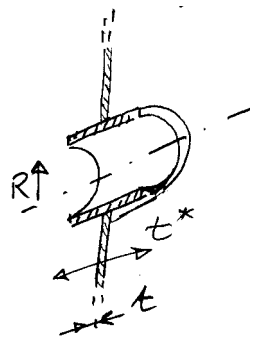


Figura 2.11: Lamiera sottile e rinforzo ad anello spesso t*

$$V_{foro,lamiera} = \pi R^2 t$$
$$V_{anello} = 2\pi RA$$

ed eguagliando i due contributi energetici si ottiene

$$A = \frac{Rt}{1-\nu}$$

da cui, nella (2.3):

$$T = \sigma_0 Rt$$

Ovvero la tensione T nell'anello diminuisce ovviamente se se ne aumenta lo spessore t*, che però incide molto negativamente sull'efficienza ponderale:

$$\frac{\mathcal{V}_{foro}}{\mathcal{V}_{anello}} = \frac{\pi R^2 t}{2\pi RAt^*} = \frac{1-\nu}{2}$$

Energeticamente, il resto della lamiera non forata immagazzina la stessa energia di quando non è forata se quella mancante nel foro viene contenuta nell'anello. Per simmetria si suppone che $\sigma_\theta = \sigma_r = \sigma_0$ uniformemente (fig. 2.12).

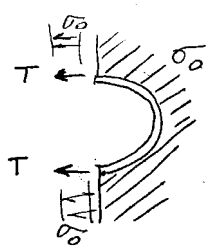


Figura 2.12: Schema del campo di tensioni

Capitolo 3

Che fatica la meccanica della frattura!

3.1 K_t e K

Fattore di concentrazione degli sforzi:

$$\boxed{K_t \triangleq \frac{\sigma_{picco}}{\sigma_1}}$$

σ_{picco} è la tensione massima che si raggiungerebbe, tenendo conto che le strane forme dei pezzi fanno discostare σ da σ_1 (che si ottiene con una analisi monodimensionale), ma *ignorando eventuali plasticizzazioni* (ovvero supponendo che σ_{picco}, per quanto maggiore di σ_1, sia *piccolo*).

Così definito, K_t va bene per trazione e flessione. K_t è stimato teoricamente o misurato sperimentalmente.

La geometria del pezzo fà sì che K_t esista e sia maggiore di 1: è quindi lecito aspettarsi che K_t vari proprio con la forma: dimensioni, rapporti tra esse, effetti di bordo più o meno trascurabili, ecc. In genere, se la forma è tale da rendere omogenee le tensioni e da rendere plausibile una analisi monodimensionale (per es. la piastra indefinita di riferimento), allora $K_t \to 1$. *Il fattore* K_t *è adimensionale e in quanto tale dipende da grandezze adimensionali:* dalla *forma* appunto, ovvero dal *rapporto di dimensioni.* Tuttavia il *gradiente di tensioni* (quanto rapidamente σ cresce da σ_1 fino a σ_{picco}) *non è adimensionale* e dipende dalla dimensione effettiva del pezzo (fig. 3.1). Già questo solo

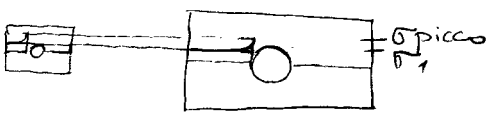


Figura 3.1: A parità di forma, ma non di dimensioni, K_t è lo stesso, ma il gradiente di tensioni cambia

fatto suggerisce che *la fatica non possa dipendere solo da* K_t. La concentrazione K_t è alta quando le linee di tensione si addensano, quindi le soluzioni costruttive che le redistribuiscono fanno bene a K_t; inoltre ciò suggerisce che K_t dipenda anche dalla (diversa) distribuzione del carico esterno (fig. 3.2).

Crepe e suoi derivati: possono essere passanti o non (del tutto); ci occuperemo solo delle prime (è più semplice, ed è più realistico pensarle in una lamiera sottile), fig. 3.3.

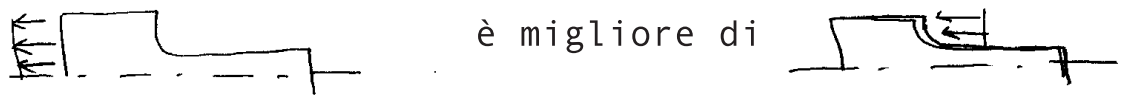


Figura 3.2: Sicuramente è possibile esprimere la diversa distribuzione dei carichi tramite un numero adimensionale! K_t dipende anche da questa, perciò non è esatto chiamarlo ''fattore di forma''.

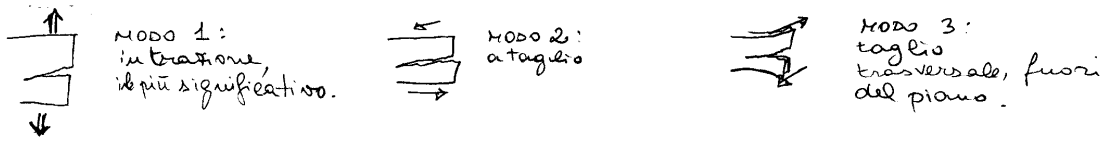


Figura 3.3: Le crepe si aprono in tre modi

Fattore di intensità degli sforzi K: diversamente da K_t, K è in relazione *diretta* col carico applicato; esso *descrive il campo di tensioni attorno alla fessura, il quale dipende anche da eventuali plasticizzazioni locali.*

Definizione di K: data una crepa (se non c'è, la creiamo!) ed un riferimento polare (r, θ), le componenti σ_x, σ_y, τ possono essere scritte così (fig. 3.4):

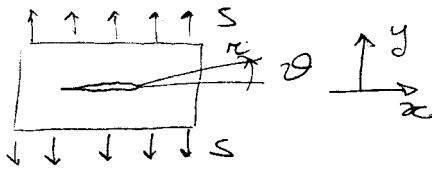


Figura 3.4: L'origine del riferimento polare è sempre posto nell'apice della fessura, e si sposta con esso, mentre quella si apre

$$\begin{aligned}
\sigma_x = \sigma_y\Big|_{\substack{\theta=0\\ r\ll a}} f_x(\theta)\\
\sigma_y = \sigma_y\Big|_{\substack{\theta=0\\ r\ll a}} f_y(\theta)\\
\tau = \sigma_y\Big|_{\substack{\theta=0\\ r\ll a}} f_{xy}(\theta)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

In queste equazioni, $\sigma_y\Big|_{\substack{\theta=0\\ r\ll a}}$ è la tensione in direzione del carico, in prossimità ($r \ll a$) della fessura di semiapertura a, lungo la linea della fessura stessa ($\theta = 0$).

Questa scrittura si spiega perché la soluzione "esatta" analitica per una fessura ellittica molto sottile in una piastra indefinita è

$$\sigma_y \Big|_{\substack{\theta = 0 \\ r \ll a}} = \frac{S\sqrt{a}}{\sqrt{2r}}$$

Siccome f_x, f_y, f_{xy} si aggirano intorno a 1, la tradizione definisce il fattore di intensità degli sforzi

$$K \triangleq C\, S\, \sqrt{\pi a} = C\sqrt{2\pi r}\sigma_y \Big|_{\substack{\theta = 0 \\ r \ll a}} \tag{3.2}$$

per cui il tensore degli sforzi (3.1) è

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \tag{3.3}$$

Il fattore di forma C vale 1 solo nel caso del problema di riferimento e dipende soltanto dalla geometria del pezzo.

Osserviamo che $\sigma \propto 1/\sqrt{r}$, ma gli spostamenti sono proporzionali a $\sqrt{r}$. Nel S.I. K_t si esprime in $MPa\sqrt{m}$.

K_t si moltiplica; K si somma: A sovrapposizione (somma) di carichi esterni, corrisponde sovrapposizione di K. Questa è una conseguenza della M.F.L.E. (Meccanica della Frattura Lineare Elastica). Un esempio è in figura 3.5. Invece K_t si moltiplica (fig. 3.6).

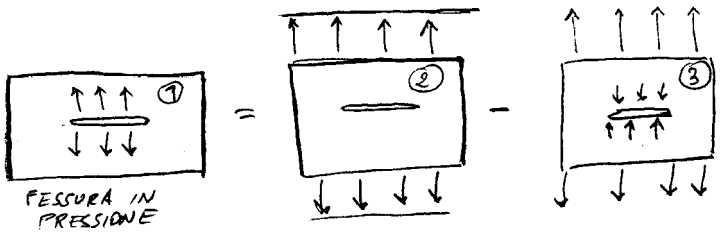


Figura 3.5: `Nel caso in esame, è utile sapere che` $K_1 = K_2 - K_3$ `perché è evidente che` $K_3 = 0$ `e quindi` $K_1 = K_2$

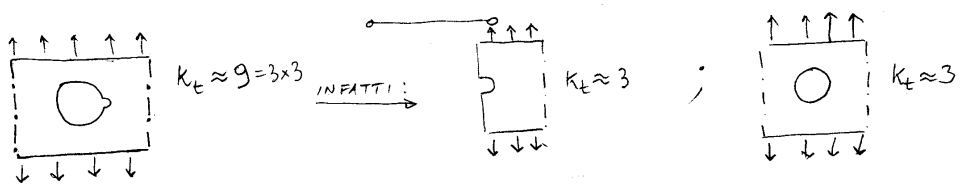


Figura 3.6: K_t `si moltiplica`

K e la plasticità: i picchi non esistono in natura,[1] che li "livella" creando zone di plasticizzazione, in cui non c'è più proporzionalità lineare tra tensione e deformazione, che risulta inferiore a quanto

[1] Eccezion fatta per quelli di figura 3.7.

Figura 3.7: I soli picchi esistenti in natura

previsto linearmente. Perciò σ non può più essere scritta con l'equazione (3.3). Tuttavia, *l'esistenza e l'estensione della zona plastica sono descrivibili tramite* K. Sotto diverse condizioni, *due provini presentano la medesima zona plastica se* K *è lo stesso, purché — proprio come l'equazione vale per* $r \ll a$ *— sia* $r\Big|_{zona\ plastica} \ll r\Big|_{zona\ elastica}$.

3.2 Che fatica!

Carichi periodici, anche molto bassi, comportano uno scorrimento relativo ciclico tra i grani di un materiale policristallino. *Relativamente presto* avviene la *nucleazione della fessura,* che è un fenomeno molto superficiale — dunque, a meno che la sezione resistente non sia molto piccola, nucleazione e rottura decisamente non coincidono. *Relativamente tardi,* la microfessura diventa visibile ad occhio nudo e viene battezzata "macro-fessura". *Le condizioni locali della superficie e del materiale, responsabili della nucleazione, non sono pure le cause della (crescita della) macro-fessura:* questa considerazione, oltre che per definire meglio le due cose, serve per capire quando si può stimare la crescita della fessura con considerazioni "macroscopiche" quali K e K_t.

Carichi AC e AV: rispetivamente, ad ampiezza costante — e tacitamente si assume che lo sia anche la tensione media σ_m — e variabile (fig. 3.8). Una fusoliera ha cicli ad ampiezza circa costante perché predomina la tensione media della pressurizzazione. Per le ali, diversamente, si considerano cicli ad ampiezza variabile.

Fatica con carichi AC: lo scopo di questa analisi è ottenere grafici del tipo in fig. 3.9 per carichi ad AC e provini con $K_t > 1$, ovvero che presentano intagli. Alcune volte, la nucleazione in un pezzo

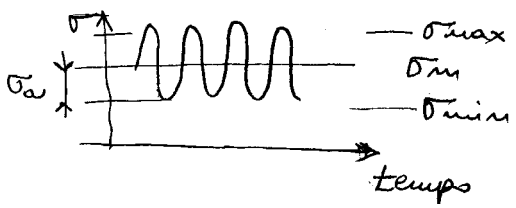


Figura 3.8: Si definiscono tramite la figura: $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$. R, σ_{min}, σ_{max}, σ_a e σ_m non sono tutte indipendenti

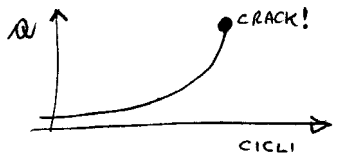


Figura 3.9: La fessura cresce nel tempo fino a raggiungere un valore indesiderato, precedentemente stabilito, solitamente la lunghezza critica a_c, definita da $K_c = C\ S_{carico-limite}\sqrt{\pi\, a_c}$. Ovviamente il valore di a identificabile con una ispezione deve essere più piccolo di a_c.

intagliato non è accettabile. In questi casi ogni ciclo deve avere (nel caso $\sigma_m = 0$) $\sigma_a < \sigma_{fk}$ (σ_{fk} è il limite di fatica del pezzo intagliato). Si assume che

$$\boxed{\frac{\sigma_{f1}}{\sigma_{fk}} = K_t}$$

in cui σ_{f1} è il limite di fatica per lo stesso pezzo senza intaglio. Ovviamente debbono esser disponibili i dati di fatica su σ_{f1}, almeno per $\sigma_m = 0$. Se i dati non sono disponibili, c'è chi prova a correlare σ_{f1} col limite di snervamento. Infatti si assume che, se σ_{f1}, uniformemente distribuito nella sezione resistente del provino non intagliato, basta a generare la nucleazione, allora la stessa σ_{f1} basterà a generarla in una piccola parte (all'apice della fessura) del provino intagliato (fig. 3.10); ovvero, basta che sia $\sigma_{picco} = \sigma_{f1}$. Perciò, essendo anche $\sigma_{picco} = K_t\sigma_1$, si ha di nuovo

$$\sigma_{fk} = \frac{\sigma_{f1}}{K_t}$$

Quando $\sigma_m \neq 0$, risultati brutti (ma non troppo) si hanno con alcune formule empiriche che tentano

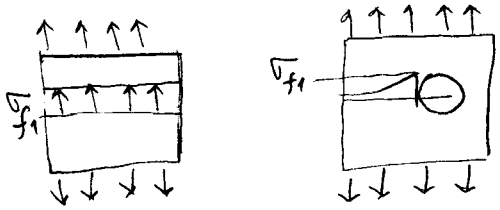


Figura 3.10: Perché si inneschi la fatica, basta che la stessa tensione uniforme si ripresenti in una piccola zona di picco

di legare σ_f con σ_m.

Fattore di fatica da intaglio K_f: è definito come

$$K_f \stackrel{\triangle}{=} \frac{\sigma_{f1}}{\sigma_{fk}}$$

perciò $K_f = K_t$. *Ecco che la geometria del pezzo (K_t) influenza pesantemente la fatica!* Il coefficiente di cui si riduce, in presenza di intaglio, il limite di fatica è proprio uguale al coefficiente di concentrazione degli sforzi.

Alla faccia di Murphy e delle sue leggi, si osserva però che spesso $K_f < K_t$. *Ciò è dovuto alle zone plastiche, che riducono σ_{picco}, ed anche a cause "statistiche":* infatti la medesima σ_{f1}, essendo

presente in una piccola zona (apice) di materiale, anziché in tutta la sezione resistente, ha minore probabilità di lavorare su un materiale che presenti difetti macroscopici, localmente. La zona plastica è influenzata dal gradiente locale. Quanto più piccolo è il pezzo e meno buono è l'acciaio, K_f è tanto più piccolo di K_t (meglio!). Alcune formule empiriche tentano di stimare K_f in base a K_t e alla geometria; ad esempio, secondo Neuber:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{A/\rho}}$$

dove ρ è il raggio dell'intaglio e A è una costante che dipende dal materiale e dal suo limite di snervamento.

Ma conoscere il limite di fatica σ_f è solo uno dei dati necessari per costruire una curva S-N. Qualche folle la completa raccordando l'altro asintoto noto (limite di snervamento σ_y) intorno a $N \sim 10^2$ e $N \sim 10^6$ (fig. 3.11). Ovviamente tutto ciò funziona molto male.

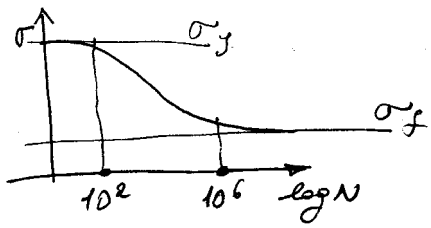


Figura 3.11: Raccordare gli asintoti per ottenere la curva S-N

Come legare la crescita delle fessure con K: si osserva innanzitutto che K è legato linearmente al carico S:

$$\Delta S = 2S_a = S_{max} - S_{min}$$
$$\Delta K = C\, \Delta S \sqrt{\pi a}$$
$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}} = \frac{K_{min}}{K_{max}}$$

Sperimentalmente si ottiene una curva come in fig. 3.9. Si afferma che, dato un materiale:

$$\boxed{\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R)}$$

Da questa, per ottenere $a(N)$ basta integrare; la difficoltà in questo caso risiede nella stima di ΔK (la geometria della fessura può essere complicata) e nello *spostamento dei carichi* causato dalle fessurazioni stesse ("load shedding"). *Fissato* R, *le curve sono sigmoidali su scala logaritmica, rettilinee in un ampio intervallo centrale (fig. 3.12).* Valgono le relazioni:

$$\frac{da}{dN} = \frac{\alpha\, (\Delta K)^\beta}{(1-R)(K_c - K_{max})} \qquad \text{(Forman)} \qquad (3.4)$$

$$\frac{da}{dN} = \alpha\, (\Delta K)^\beta \qquad \text{(Paris)} \qquad (3.5)$$

La (3.4) vale nel tratto lineare e in quello successivo delle fessuraizoni rapide; la (3.5) descrive invece solo il tratto lineare. Una curiosità: la (3.5) cerca di descrivere con K (che è un parametro elastico) un fenomeno elasto-plastico.

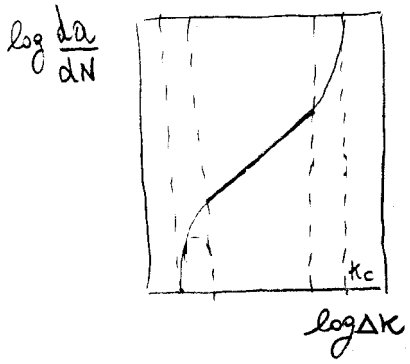


Figura 3.12: Velocità di accrescimento della fessura in un grafico logaritmico. Le curve salgono all'aumentar di R. Il primo tratto è detto ''soglia'' di propagazione: le escursioni di K sono piccole e non in grado di attivare la propagazione.

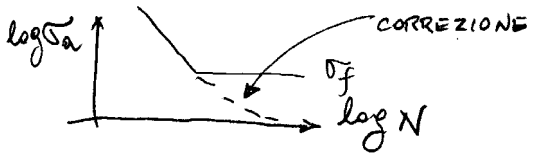


Figura 3.13: Modifica delle curve S-N in modo da eliminare il limite di fatica

Fatica con carichi AV: Il metodo più noto ed usato è quello di Pålmgren-Miner *di accumulo lineare del danno.* Qui non lo si descriverà perché, essendo schifoso da fare schifo, sarà di certo già noto ai miei 3^3 lettori. Piuttosto, lo si insulterà un po': P-M non considera le *storie di carico.* Per P-M, tre colpettini seguiti da una mazzata sono la stessa cosa di una mazzata seguita da tre colpettini. La realtà dice diversamente (per via della *tensione residua* all'intaglio, ecc.). In altre parole, esso non considera eventuali danneggiamenti pre-esistenti (ovvero, eseguiti con carichi superiori al limite di fatica) che, seppur "piccoli", rendono eventuali cicli successivi con $\sigma < \sigma_f$ sicuramente più gravosi che se eseguiti senza difetti iniziali.

Un metodo molto stupido, che serve solo a mettere a posto la coscienza del progettista che lo usa, è eliminare il limite di fatica (così tutti i cicli portano un danno) estrapolando la curva (fig. 3.13).

Per dire che P-M fa previsioni troppo ottimiste, ovvero che sottostima i danni, si dice che prevede $\sum_i \frac{n_i}{N_i} < 1$. Infatti il numero di cicli N_1 permessi, se ogni ciclo n_1 è sotto al limite di fatica, vale $N_1 = \infty$ e perciò $n_1/N_1 = 0$. La realtà spesso assegna a n_1/N_1 un valore finito che fa aumentare $\sum_i \frac{n_i}{N_i}$.

P-M va relativamente bene su pezzi che non hanno già intagli, in cui non avviene una redistribuzione *macroscopica* degli sforzi a causa della plasticizzazione. In questi casi si ha $\sum > 1$ (di poco) se ci sono prima i cicli più intensi, mentre $\sum < 1$ se ci sono prima quelli al di sotto del limite di fatica. Viceversa, con provini già intagliati, P-M dà risultati catastrofici: $\sum > 1$ (di poco) se vengono prima i cicli deboli, ma $\sum \gg 1$ se vengono prima quelli intensi, che vanno a lavorare sugli intagli già esistenti ottenendo favorevoli plasticizzazioni, delle quali P-M non tiene conto.

3.3 Come trattare e cosa sapere sui cicli V.A., buttando via P-M e vivendo felici

La chiusura della fessura, ovvero gli effetti di R: s'è già detto che $\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R)$. È facile comprendere la dipendenza da K, ché è direttamente legata al carico. R entra in gioco per spiegare la chiusura della fessura, e c'è chi propone formule del tipo $\frac{da}{dN} = f(\Delta K_{efficace})$, ovviamente con $\frac{\Delta K_{efficace}}{\Delta K} = f(R)$; infatti, maggiore è R e minore è l'effetto di chiusura e $\Delta K_{efficace} \to \Delta K$.

Quando una fessura si propaga e cresce, genera una zona plastica attorno all'apice, come un gonfiore che spinge per mantenerla chiusa; cosicché, per aprirla, serve un carico S_{op} maggiore di S_{min} cosicché invece di $\Delta S = S_{max} - S_{min}$ si ha $\Delta S_{efficace} = S_{max} - S_{op}$. Elber propose

$$\frac{\Delta K_{efficace}}{\Delta K} = \frac{1}{2} + \frac{4R}{10}$$

ma esistono altre soluzioni.

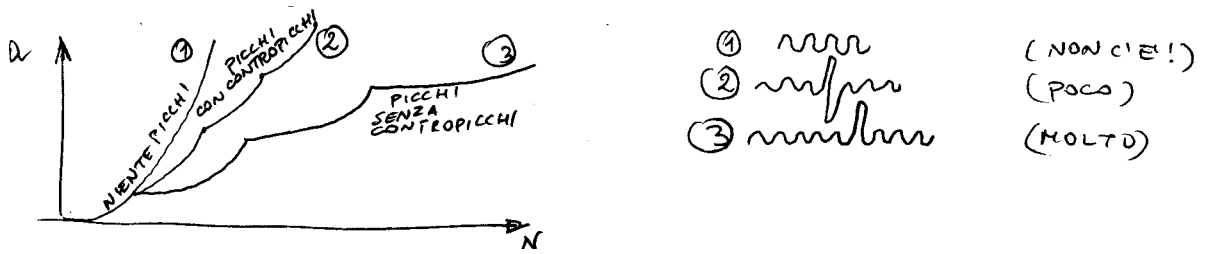


Figura 3.14: L'effetto dei picchi su una curva di accrescimento

L'effetto dei picchi su una storia di carichi che altrimenti sarebbe molto monotona! L'effetto è positivo, perché plasticizza l'apice e tende a tenerlo chiuso. *Quanto* è positivo? La risposta è in figura 3.14, che suggerisce che non è esatto fare previsioni su a semplicemente integrando $\frac{da}{dN}$... eppure è ciò che si fa in pratica, con la consapevolezza di ottenere in modo semplice risultati cautelativi.

Alternativamente, ci sono almeno due metodi che cercano di tenere in conto le storie di carico diverse: sono detti di prima e di seconda generazione.

Metodi di 1^a generazione, basati sulla plasticizzazione dell'apice: Si introduce un fattore di ritardo $\phi_i \leq 1$ in modo che $\Delta a_i = \phi_i \left(\frac{da}{dN}\right)_i$. Non c'è nessun ritardo ($\phi = 1$) se il nuovo ciclo i–simo è sufficientemente ampio da generare una zona plastica intorno all'apice più grande di quella già prodotta dal picco precedente. Invece, se la novella zona plastica (approssimabile con un cerchio, fig. 3.15) resta interna alla precedente (ovvero se il nuovo cerchio è tuttalpiù tangente al precedente), secondo Irwin:

$$\phi_i = \left(\frac{r_i}{r_{pl}}\right)^m$$

$$r_i = \frac{1}{\pi}\frac{1}{C}\left(\frac{K_{max}}{\sigma_{snerv}}\right)^2$$

Ovviamente, m e C sono da determinarsi empiricamente, perciò il problema è tutt'altro che risolto. In linea di massima, $C = 2$ per spessori sottili (plane stress) e $C = 6$ per spessori grandi (plane strain).

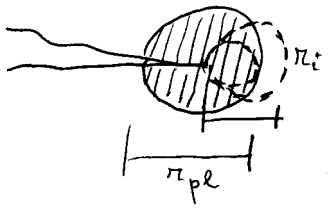


Figura 3.15: I metodi di Wheeler e Wilenborg si basano sulla formazione di zone plastiche intorno all'apice. Non tutti i metodi però tengono anche conto della chiusura, né danno un'espressione analitica per le dimensioni.

Metodi di 2^a generazione, basati sulla chiusura della fessura: è necessario valutare S_{op} e cose così. Se volete fare una tesi di Laurea per approfondire il tema, accomodatevi!

L'Italiano non lavora, fatica.
[5]

Capitolo 4

Filosofie di progetto

A che pro le fatiche*, se il piacere, che è il solo fine possibile, è sempre male?*
[4, pag. 4431]

4.1 Introduzione: le filosofie di progetto in relazione alla fatica

Per potere far volare un velivolo, occorrono: 1. dimensionamento statico; 2. dimensionamento a fatica; 3. dimensionamento aeroelastico.Ora ci occuperemo solo del secondo punto; esso, nelle strutture aeronautiche, è un grosso problema perché si scontra col desiderio di leggerezza. Inoltre, ci limiteremo a menzionare solo le *filosofie* che regolano 2, accennando ai *mezzi* e alle *tecnologie* ad esse necessarie (le curve S-N, il fattore di concentrazione degli sforzi, la meccanica della frattura...) e alle *conoscenze* necessarie (spettro di carico, ecc.).

4.2 Le due (o tre?) filosofie

C'era una volta il Safe-Life (vita sicura); oggi si usa solo a fronte di una dimostrazione che non è possibile fare altrimenti in modo economico o "fattibile". Tuttavia, il Safe-Life è di certo scoraggiato, visto che, una volta fatto un dimensionamento con curve S-N per una certa vita, e verificata la stessa con prove in vera grandezza, l'ente certificante assegna una *vita sicura* che è solo un sottomultiplo (ad es. 1/4) di quella verificata.

In pratica, il Safe-Life identifica la durata a fatica con la sola prima fase della vita di una fessura: la nuclazione. Il Safe-Life conduce a strutture tanto grosse e robuste e pesanti, che né si rompono, né è necessario ispezionarle.

Le due filosofie di progetto usate oggi sono: Damage-Tolerance per un approccio sicuro, Durability per l'economia di esercizio.

4.3 La *Tolleranza al Danno* (DT)

Alla base di questa filosofia ci sono due concetti che essa comprende:

slow crack growth, ovvero le cricche ci sono e crescono, ma in modo "lento", cioè tali da non diventare inaccettabili prima della revisione successiva (le ispezioni e le sue periodizzazioni diventano parte del progetto);

fail-safe, ovvero *sicuro* (e va specificato cosa vuol dire "sicuro") anche se *si rompe* (va previsto il modo più brutto).

La struttura è progettata in modo che, in caso di danneggiamento, essa resta resistente finché il danno non viene rilevato da una ispezione (prevista). Non solo, dunque, fail-safe (la struttura danneggiata deve reggere al carico), ma anche *s.c.g.*, ovvero il danno cresce lentamente, in maniera prevedibile e il più possibile osservabile.

La meccanica della frattura deve essere nota: per progettare in modo che le cricche crescano lentamente, per fare previsioni statistiche sui tempi di ispezione e per determinare la *resistenza residua* che la struttura conserva in presenza del difetto (che non è necessariamente dovuto alla fatica: vengono considerati anche quelli degli causati dall'ambiente e dagli incidenti; Twin Towers a parte).

S'è detto: fail-safe = sicuro anche se si rompe. "Sicuro" qui vuol dire che la struttura (la sua resistenza residua) deve reggere il carico limite (vecchie norme indicavano solo l'80% di questo) fino alla riparazione. "Se si rompe" vuol dire mettere in conto la possibilità di danneggiamenti multipli, anche su percorsi di carico alternativi. I rimedi più comuni per ottenere il f.s. sono: crack-arrest (§4.8, ad esempio nel ventre della fusoliera, irrigidito da correnti che interrompono la cricca), multiple load path (ad es. i cassoni alari divisi in più tavole giuntate tra loro, affinché una cricca non possa estendersi da una tavola all'altra), back-up (strutture di riserva che iniziano a lavorare solo nel caso di cedimento di quella principale). Condizione necessaria per il fail-safe è che la struttura sia inerentemente iperstatica, a più vie di sforzi.

Resistenza residua: Salvo che alla "nascita" oppure alla fine di un (breve) periodo iniziale progettato safe-life, l'aeroplano è (considerato) danneggiato secondo la filosofia d.t., perciò si parla di resistenza residua. Questa (fig. 4.1) non deve mai essere inferiore al *carico ultimo*; può eventualmente esservi superiore all'inizio della vita o successivamente ad un restauro.

> *L'incivilimento ha posto in uso le fatiche fine ec. che consumano e logorano ed estinguono le facoltà umane*
> *[4, pag. 76]*

Carico Limite: l'aeroplano può tollerarlo per tre secondi conservando la possibiltà di volare (a terra, verrà ispezionato). Statisticamente, deve avvenire non più di una volta nella vita di ciascun aeroplano.

Carico Ultimo: dopo tre secondi di C.U., l'aeroplano, pur danneggiato, deve però essere ancòra in grado di atterrare. Statisticamente, il C.U. non deve verificarsi più di una volta della vita dell'intera flotta.

4.4 Durability

È un approccio economico. Assicurato il D.T., il problema è migliorare l'impatto economico: ovvero, più tardi si verificano problemi di fatica, meglio è! Dopo un TOT di anni, le ispezioni e le riparazioni (sempre più frequenti) iniziano a costare troppo: lo scopo del progetto a durability è allungare la vita economica (fig. 4.3). Allora un periodo iniziale di crack free life è molto gradito: allunga la vita economica. Ad es. è possibile desiderare un tasso di guasti inferiore all'1%.

Per esempio, un pannello alare può essere integrale anziché composto: in tal caso, mancando fori e rivetti, i vantaggi sulla durata sono evidenti, tuttavia non si ha il fail-safe.

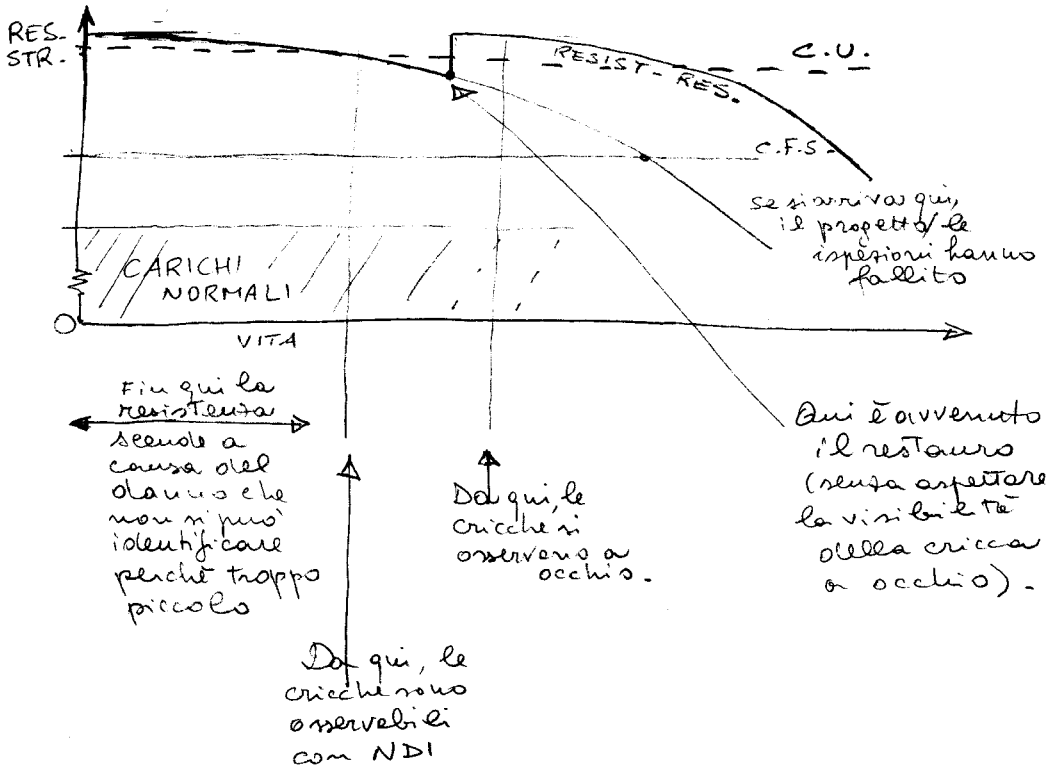


Figura 4.1: Resistenza residua --- C.U.: carico ultimo; C.F.S.: carico di fail safe (=carico limite); NDI: ispezioni non distruttive

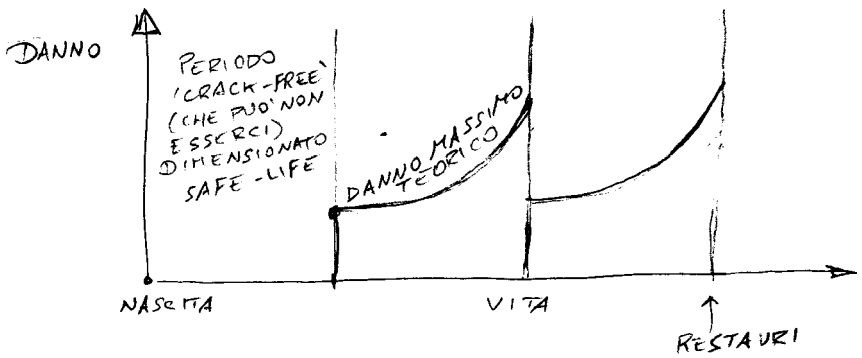


Figura 4.2: Crescita del danno

4.5 C'è stato un tempo...

La storia dei regolamenti è complicata quasi quanto i regolamenti stessi. "Una volta", il fail safe era il *solo criterio del D.T.*, ed aveva i difetti di considerare soltanto i danni per fatica e di rimediare a questi con ridondanze piuttosto pesanti. Un D.T. più maturo inserisce le tecnologie di ispezione nel progetto e prevede che danni possano originarsi in modi diversi dalla fatica e che siano comunque diffusi e presenti; inoltre, con una analisi di meccanica della frattura, aggiunge una analisi slow crack growth atta a ridurre gli svantaggi (anche economici) di un cedimento.

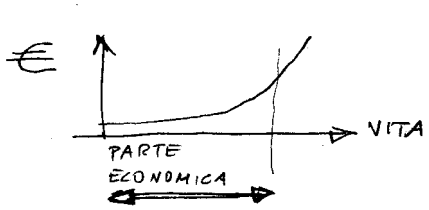


Figura 4.3: Parte economica della vita di un aeroplano

Il D.T., nato in ambiente militare (MIL-A-8344), oggi è obbligatorio anche in campo civile (FAA, JAA).

4.6 Strutture di Back-Up

Benché le strutture senza ridondanza abbiano il vantaggio di essere più semplici da produrre, la presenza di ridondanze rende la costruzione non solo più sicura ma, talvolta, più leggera, a parità di carico da sostenere. Sono un esempio i longheroni delle ali (fig. 4.4): quando sono tre o quattro, anziché uno solo, non soltanto ciascuno può essere più leggero — perché dimensionato per reggere la struttura col cedimento di uno solo di essi — ma è anche meno soggetto a cedimenti perché il carico è più distribuito. Osserviamo che non basta che ci siano più percorsi alternativi di carico; bisogna anche che il parziale cedimento di uno non renda sùbito inutilizzabile tutta la struttura andando a caricare gli altri, perché sennò cederebbero tutti i percorsi pressoché contemporaneamente.

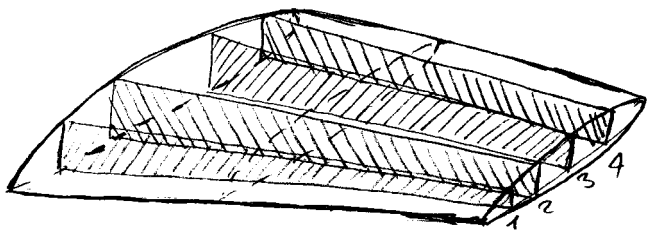


Figura 4.4: Ala con quattro longheroni: se se ne rompe uno, restano ben i 3/4 della robustezza

4.7 Multiple load path

Un cassone alare, nella parte compresa tra il longherone anteriore e quello posteriore, può essere composto da 4 tavole (ad es.) anziché solo da una (fig. 4.5), congiunte da strisce longitudinali. L'idea è che se si spacca una tavola, non si spacca tutto il dorso, perché la frattura resta confinata dalle giunzioni. Quindi che la struttura sia composta e non integrale è condizione necessaria per questo.

4.8 Il crack-arrest, con particolare riguardo ai pannelli irrigiditi di fusoliera

Dal punto di vista della *filosofia progettuale,* serve affinché un aeroplano possa continuare a volare anche con una cricca sviluppata ma sicuramente arrestata ad una lunghezza che sia *sicura e di*

evidente individuazione (attualmente i regolamenti parlano di due baie contigue fessurate ovvero di circa $2 \times 50\text{cm} \approx 1\text{m}$).

Dal punto di vista *fisico,* la soluzione c.a. sovverte il normale stato delle cose, in cui all'aumentare della fessura, aumenta K (è $dK/da > 0$) e conseguentemente, una volta raggiunto il valore critico K_c per la propagazione rapida, K e a aumentano entrambi. La soluzione c.a., viceversa, crea una struttura tale per cui ad alcuni valori di a corrisponde $dK/da < 0$. Se questa zona è tale da precedere i K per cui si ha un cedimento, il gioco è fatto.

Dal punto di vista *realizzativo,* il c.a. sfrutta gli irrigidimenti delle pareti sottili, in ogni caso necessari per la stabilità della forma.

Infine, dal punto di vista *concettuale,* si usano *soluzioni a trasferimento di carico.* Man mano che l'apice della fessura si avvicina algli irrigidimenti, le linee di forza vi si avvicinano prima, e vi passano poi (fig. 4.6). Dunque gli incrementi delle fessure sono tali da scaricare il pannello e rendere più difficile la propagazione della cricca.

Il punto di vista analitico è quello più miope e noioso; segue.

Possiamo riferirci al carico applicato di trazione S come alla "resistenza residua" nel senso seguente: fissato $K = K_c$, si ha propagazione instabile della fessura per un carico che è tanto inferiore quanto, a pari geometria C, aumenta la fessura a:

$$S = \frac{K_c}{C\sqrt{\pi a}}$$

Una lastra piana ($C = \text{costante} = 1$) non ha nessun modo per arrestare la crescita di a: una volta che, corrispondentemente ad un carico S_0, si sia raggiunta la lunghezza critica a_0:

$$S_0 = \frac{K_c}{C\sqrt{\pi a_0}}$$

allora a aumenta ($a > a_0$) perché la resistenza residua scende ($S < S_0$). L'unico modo perché questo non accada è modificare C: è quel che si fa con la soluzione a trasferimento di carico, in cui non soltanto $C < 1$, ma soprattutto C varia durante la crescita di a, diminuendo.

In figura 4.7, il caso della lastra piana mostra che $S(a)$ è monotona decrescente. La condizione di instabilità è duplice:

$$\begin{cases} K = K_c \\ \left.\frac{dK}{da}\right|_{S=cost} > 0 \end{cases}$$

Nel caso della lastra piana C resta costante e perciò è sempre $dK/da > 0$, dunque la condizione di instabilità si riduce a $K = K_c$. Viceversa il grafico per un pannello irrigidito è del tipo in fig. 4.8, in cui esistono zone con $dK/da < 0$ (curva in salita) e perciò, raggiunto a critico per cui $K = K_c$, a cresce e K diminuisce e la fessura torna stabile. Ciò è possibile grazie alla presenza degli irrigidimenti. Una struttura integrale non ha la capacità di crack-arrest.

Crack-arrest vuol dire dunque questo: arresto della crescita *istantanea* della fessura.

4.8.1 Come si ottiene la curva 4.8

Il problema completo sarebbe (molte volte) iperstatico (ci sono migliaia di rivetti). Con l'ipotesi di M.F.L.E., il problema di fig. 4.9 equivale agli addendi in fig. 4.10 e il K risulta dalla somma dei singoli K.

Tuttavia anche così il problema è numericamente intrattabile; con opportune ipotesi semplificative è stato risolto da Muskeishvili con le trasformate conformi per ottenere $c = f(a)$.

4.8.2 Il problema dei corrente e dei rivetti

Tra le ipotesi, soffermiamoci sulle equazioni di congruenza dello spostamento relativo corrente-lamiera in corrispondenza dei rivetti: questi non sono perfettamente rigidi.

Rispetto a un pannello non irrigidito, K per la lamiera è ridotto perché parte degli sforzi è assunta dai correnti, in modo tanto più efficace quanto più rigidi sono i rivetti. D'altra parte, la frattura aumenta il carico sui correnti e sui rivetti. Alla fine, la struttura può cedere: 1. nella lamiera, 2. nei correnti, 3. nei rivetti. Quando non sono rotti, i correnti debbono reggere anche il carico trasmesso dai rivetti, perciò la struttura cede quando S^* raggiunge il carico di rottura dei correnti: nel caso di fig. 4.11(a)

$$S^* = S + \frac{\sum P_{ij}}{\text{Area correnti}}$$

Qualitativamente è come in fig. 4.12. Eventuali intersezioni con le curve di cedimento dei correnti o dei rivetti possono causare un cedimento anche se ormai la curva relativa alla lamiera è in salita e quindi la fessura è stata già arrestata. I punti del grafico a destra della curva di cedimento dei correnti non sono più raggiungibili; in tal senso le curve della lamiera e dei correnti interagiscono tra loro. Conviene alzare la curva $S^* = S_{ultimo}$ per "abbracciare" più punti a destra; si può farlo modificando la rigidezza dei correnti. Se questa diminuisce, la lamiera ne risente a vantaggio dei correnti che risultano alleviati; complessivamente si allarga la "forbice" tra la curva di cedimento dei correnti (che si alza) e quella della lamiera (che si abbassa).

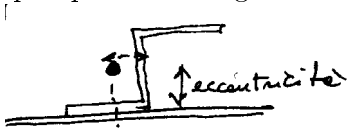
Chiaramente, una frattura che si propaghi con un carico troppo elevato "scavalca" la parte di curva in salita (es. A in figura) e il cedimento si determina per causa del rivetto o del corrente — quale delle due curve si incontri prima.

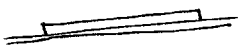
Si osservi che il grafico è di resistenza *residua*, ovvero la presenza di una fessura è sottintesa. Il grafico tenta quindi di spiegare se la frattura si arresta o meno e se, una volta arrestatasi, può comunque cedere per colpa del rivetto (come nel punto B di figura) o dei correnti.

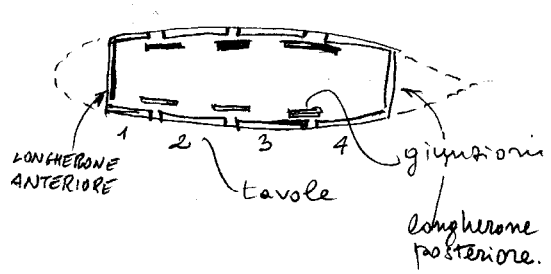
La figura 4.13 mostra il caso di un corrente sottodimensionato.

4.8.3 Sulla geometria dei correnti

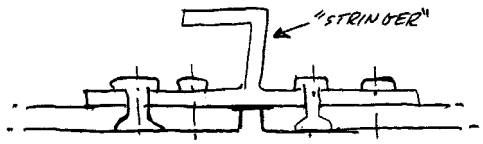
Gli sforzi percorrono preferibilmente le strutture più rigide, perciò la soluzione a trasferimento di carico (sui correnti) funziona tanto meglio quanto più questi sono rigidi.

Purtroppo la sezione a Z comunemente usata 

si discosta da un'asta piatta  (che pure viene talvolta usata, ad esempio in forma di strisce incollate) ed ha una forte eccentricità che fa sì che gli sforzi che i rivetti applicano sul corrente producano, oltre a un allungamento globale della struttura, anche un allungamento maggiore della flangia a contatto col pannello, a fronte di un allungamento inferiore — che però non ha interesse — della flangia libera: questo equivale a una diminuzione di rigidezza. Perciò spesso i correnti del dorso dell'ala hanno forma diversa da quelli del ventre.



(a)



(b) Dettaglio del corrente di giunzione

(c) Dall'alto: i rivetti sono sfasati

(d) Possono esserci altri correnti, oltre a quelli di irrigidimento

Figura 4.5: Nell'esempio, i pannelli dorsali e ventrali hanno quattro tavole.

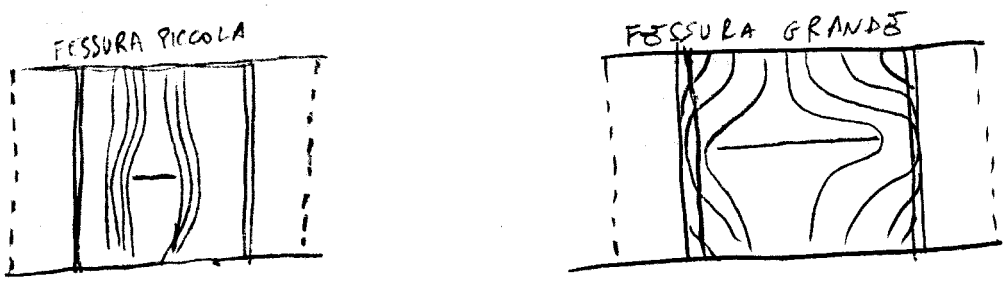


Figura 4.6: IL concetto del trasferimento di carico

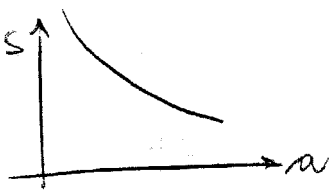


Figura 4.7: Lastra piana semplice: $S = \frac{K_c}{C\sqrt{\pi a}}$, $K = CS\sqrt{\pi a}$

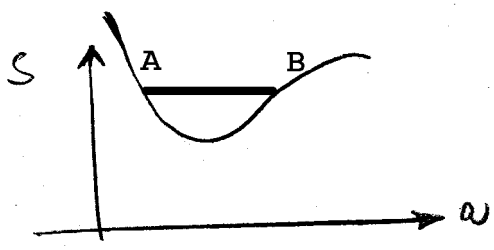


Figura 4.8: Grafico tipico per la resistenza residua di un pannello irrigidito --- Nel punto A si è raggiunta la criticità; da A a B la fessura aumenta rapidamente mantenendo costante il carico; in B c'è l'arresto

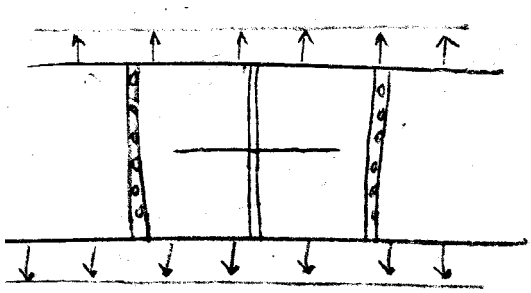


Figura 4.9: Schema del problema

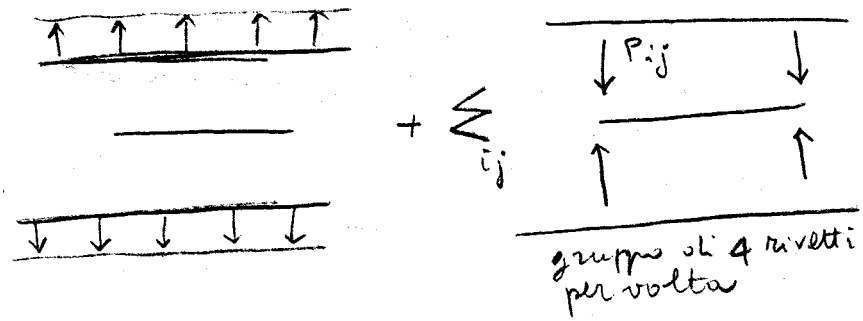
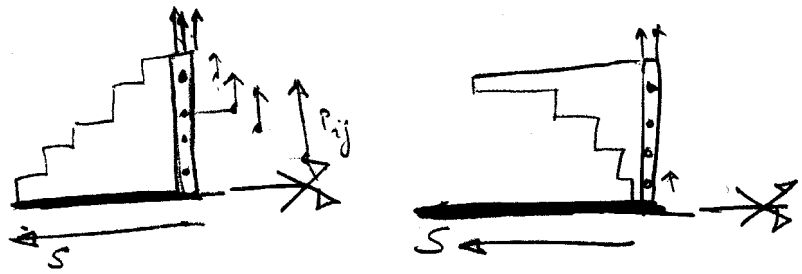


Figura 4.10: Scomposizione del problema in fig. 4.9



(a) corrente integro (b) corrente rotto

Figura 4.11: a: la sezione più sollecitata (a trazione) è quella all'altezza della frattura --- b: la sezione più sollecitata è quella di estremità

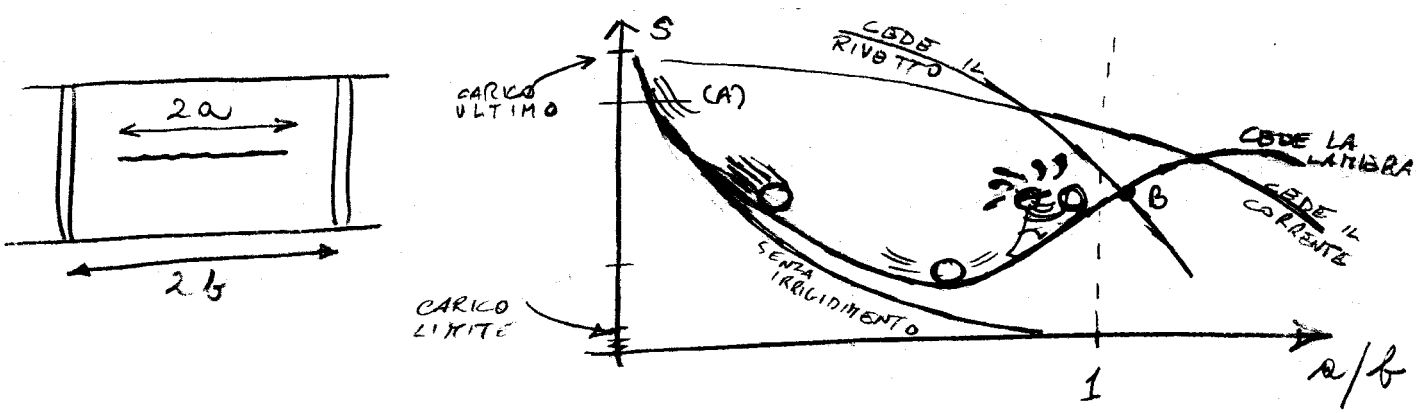


Figura 4.12: Curve di cedimento della lamiera irrigidita, dei rivetti, dei correnti sovrapposte

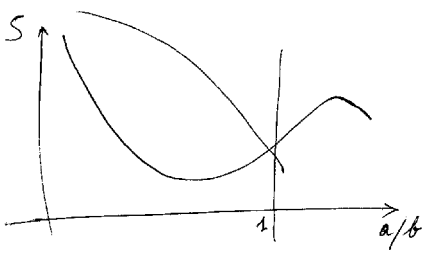


Figura 4.13: Il corrente cede prima di riuscire ad arrestare la fessura

Capitolo 5

Minimo Peso

Elenco dei Simboli

A	area della superficie
α	fattore di efficienza di Farrar
b	spaziatura tra i correnti di rinforzo
b_w	altezza centroidale
c	coefficiente di vincolo
c	corda aerodinamica
γ	peso specifico
J	momento d'inerzia della sezione della trave
k	costante elastica di una molla equivalente
L	spaziatura tra le cèntine, ovvero lunghezza di un cassone
L'	lunghezza libera di inflessione
M	momento flettente
M_t	momento torcente
N	indice di carico
P	generico carico
ρ	raggio giratorio di inerzia
s	spessore del profilo alare
Σ	solidità
σ_{cy}	tensione di snervamento a compressione
$\bar{t}$	spessore della parete equivalente
W	peso della struttura
0	primo valore nell'iterazione

Il minimo peso è un'invenzione delle sinistre.
Danilo

Il pannello superiore dell'ala è sollecitato prevalentemente a compressione: verrà quindi progettato a minimo peso a fronte dei carichi instabilizzanti. Viceversa, il pannello ventrale è attaccato soprattutto da carichi affaticanti, perciò in fase di progetto verrà dimensionato per durata e tolleranza a danno.

5.1 In che modo un'ala si trasforma in un rettangolo

Perocché dove non v'ha piacere, quivi ha patimento
[4, pag. 3551]

Un'ala del profilo alare di corda c e spessore massimo s viene idealizzato in un cassone rettangolare di larghezza $w \approx 0.5\ c$ ed altezza $h \approx 0.8\ s$, rinforzato con correnti solo sul pannello in compressione [3, pp. 33,34]. Il profilo è dato, quindi l'ottimizzazione di minimo peso non riguarda w e h ma solo lo spessore equivalente e la geometria degli irrigidimenti. L'ala diventa una trave rettangolare a profilo sottile, incastrata, soggetta a carichi concentrati (motori, piccioni, ecc.) e distribuiti (peso, portanza, ecc.), i quali generano un momento flettente M e un momento torcente M_t (molto minore, confrontabile con M solo verso l'estremità dell'ala). La sezione rettangolare risulta allora sollecitata a taglio dai carichi concentrati e da M_t, e sollecitata a trazione/compressione da M, con "indice di carico"[1]

$$N = \sigma\, \bar{t} = \frac{M}{w\ b_w}$$

in cui l'altezza centroidale b_w tiene conto della posizione dell'asse neutro del pannello rinforzato (funzione della geometria), invece che della posizione (h) della sola superficie esterna del cassone.

Per semplicità [3, pag. 35] si suppone di dimensionare a minimo peso soltanto in base a M (che può contenere maggiorazioni dovute a fattori di sicurezza, ad es. 1.1, e alle normative, ad es. 1.5):

$$M = 1.1\ M_{\text{ultimo}} = 1.1\ 1.5\ M_{\text{limite}}$$

Trascureremo quindi i flussi di taglio e ci occuperemo solo delle tensioni σ; *si invita il lettore a non volare mai su un aeroplano in questa guisa dimensionato.*

Longitudinalmente, l'ala è divisa in cassoni da cèntine spaziate di L, le quali aumentano la stabilità euleriana degli elementi longitudinali ed introducono nell'ala, sotto la forma di flussi di taglio, i carichi aerodinamici e quelli concentrati.

Ogni cassone $w \times h$ è di tipo multibox (solitamente per le ali sottili degli aeroplani supersonici) oppure[2] irrigidito da n correnti, di sezione trascurabile rispetto a $w\ h$ e spaziati di b, tale che $b\ n = w$.

5.2 Criterio generale di minimo peso

Passano anni interi senza che noi proviamo un piacere vivo, anzi una sensazione pur momentanea di piacere. Il fanciullo non passa giorno che non ne provi. Qual è la cagione? La scienza in noi, in lui l'ignoranza
[4, pag. 1262]

[1] L'espressione

$$\text{indice di carico} = \frac{\text{momento applicato}}{\text{area delimitata dal baricentro delle sezioni in parete sottile}}$$

è valida in genere.

[2] La leggenda narra di una terza soluzione usata "per le alette dei missili supersonici: il cassone a *honeycomb*", sottile: è un cassino.

Una struttura di minimo peso non deve avere materiale superfluo per sostenere carichi inesistenti [3, pp. 13,42]. Parlando di stabilità, condizione necessaria è che le varie forme di instabilità si verifichino allo stesso valore di tensione. Infatti la struttura si instabilizza già con la sola tensione relativa alla *forma* di instabilità che si manifesta per prima (torsionale, flessionale, morale, ecc.) o alla sua *parte* più debole (anima, flangia, corrente, ecc.). L'accoppiamento tra i modi di instabilità comporta che la tensione critica più alta aumenti ma che quella più bassa diminuisca, riducendo così il carico sopportabile ed allontanando la soluzione di minimo peso.

Un eccesso tira l'altro, perché gli eccessi, contro quello che a prima vista apparisce sono più affini, amici e vicini tra loro, che con quello che è fra loro di mezzo
[4, pag. 2032]

Analiticamente, la tensione applicata $\sigma_a = N/\overline{t}$, la tensione critica euleriana σ_{co}, la tensione critica locale σ_{cr} (e tutte le tensioni critiche di eventuali altre forme di instabilità considerate) debbono essere uguali tra di loro e cioè alla tensione ottimale σ_o:

$$\sigma_o^3 = \sigma_a \, \sigma_{co} \, \sigma_{cr} \tag{5.1}$$

Il problema viene quindi ricondotto alla determinazione di σ_{co} e σ_{cr}.

Esempio: in una trave a sezione sottile quadrata[3] $b \times b$, di spessore t e caricata di punta con P:

$$\sigma_{co} = \frac{\pi^2 E_t}{6} \frac{b^2}{L^2} \propto b^2 \tag{5.2}$$

$$\sigma_{cr} = 3.62 \, E_s \frac{t^2}{b^2} \propto \frac{t^2}{b^2} \tag{5.3}$$

$$\sigma_a = \frac{P}{4b\,t} \propto \frac{1}{b\,t}$$

Ferma restando l'uguaglianza tra le diverse tensioni, data la dipendenza su indicata dalle variabili di progetto b e t, se in luogo della (5.1) si scrive equivalentemente

$$\sigma_0^5 = \sigma_{co}^2 \, \sigma_{cr} \, \sigma_a^2$$

si arriva a un'equazione in cui t e b non compaiono; queste si determinano esplicitando le relazioni

$$\sigma_o = \sigma_{cr}$$
$$\sigma_o = \sigma_{co}$$

in cui σ_o è ora termine noto.

5.3 Effetto della plasticità

Il lasciare i cadaveri imputridire sopra terra e nelle proprie abitazioni, volendoseli conservare dappresso e presenti, è mortifero, e dannoso ai privati e alla repubblica
[4, pag. 3431]

Minimo peso vuol dire massimo sfruttamento del materiale [3, pp. 28,29]: non è insolito usarlo in campo plastico. Tra le molte formule che tentano di descrivere il comportamento del materiale che

[3] Sia la sezione quadrata, sia quella circolare non hanno "direzioni preferenziali" (sono simmetriche) e quindi non hanno una parte *inutilmente* più pesante.

ha superato il campo elastico, vanno molto di moda le seguenti relazioni, da usarsi nelle (5.2) e (5.3):

$$E_t = \tau\, E = E \frac{1}{1 + \frac{3}{7}\, n \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.7}}\right)^{n-1}} \quad \text{(modulo tangente)}$$

$$E_s = \eta\, E = E \frac{1}{1 + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.7}}\right)^{n-1}} \quad \text{(modulo secante)}$$

$$\overline{\tau} = \sqrt{\tau\, \eta}$$

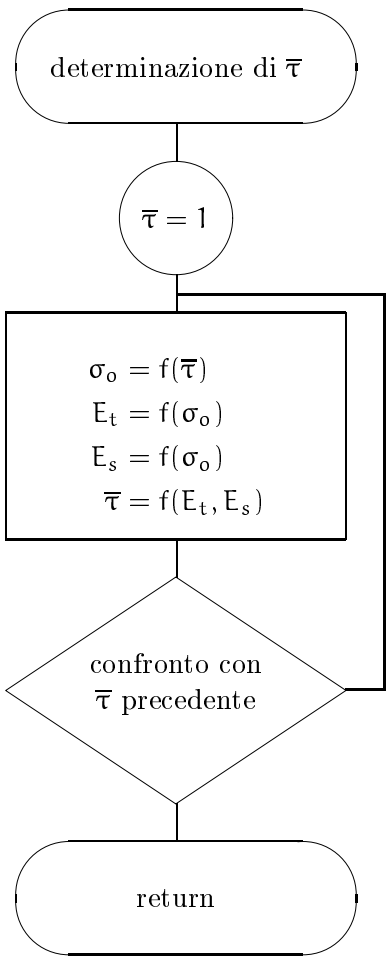
L'importanza di $\overline{\tau}$ è legata al fatto che provando a scrivere la soluzione del carico ottimale nella forma

$$\sigma_o = \alpha \sqrt{\frac{N\, \overline{\tau}\, E}{L'}} \tag{5.4}$$

è possibile vedere un senso fisico, se $L' = L/\sqrt{c}$. $\overline{\tau}$ è legato al materiale e a σ_{cy} (si ha infatti che $\overline{\tau} = 1$ se $\sigma < \sigma_{cy}$, mentre $\overline{\tau} < 1$ fuori dal limite elastico), invece α misura l'efficienza strutturale della geometria del pannello.

Dunque $\overline{\tau} = f(\sigma)$ e $\sigma = f(\overline{\tau})$: ciò causa la necessità di un procedimento iterativo per la determinazione di σ_{co} e σ_{cr}.

Il calcolo delle probabilità dimostra l'improbabilità di ogni calcolo
[6]



In questo ciclo è buona norma non scegliere n e $\sigma_{0.7}$ a sentimento, ma prelevarli da apposite tabelle che descrivono le caratteristiche del materiale considerato.

5.4 Considerazioni sulla scelta del materiale

Non basta scegliere in base a E: ad es. l'acciaio, per altri usi considerato molto buono, è anche molto pesante. Una *figura di merito* per l'efficienza ponderale è γ/σ_o: infatti il peso W della struttura cresce col suo volume (L^3) mentre la sua capacità di resistere ai carichi P cresce con l'area resistente (L^2) e dunque il confronto può farsi sulla quantità

$$\frac{W/L^3}{P/L^2} = \frac{\gamma\, A\, L/L^3}{\sigma_0/A\, L^2} = \frac{\gamma}{\sigma_0}$$

Guardando la (5.4) si conclude che, siccome L e N sono grandezze date e non ottimizzabili, e dipendendo α dalla geometria ma non dal materiale, le variabili che dettano la scelta del solo materiale sono nella relazione seguente:

$$\frac{W/L^3}{P/L^2} \propto \frac{\gamma}{\sqrt{E\,\overline{\tau}}}$$

Minore è questa quantità, migliore è il materiale ai fini del minimo peso.

In campo elastico ($\overline{\tau} = 1$) il confronto sui materiali è regolato da $\gamma/\sqrt{E}$; nel campo plastico, il valore ottimo σ_o essendo limitato da σ_{cy}, il confronto è fatto su γ/σ_{cy}.

5.5 Pannelli irrigiditi e messi a dieta

Assioma di serenità: questo pannello non dovrà mai volare sul serio.

Le variabili da ottimizzare sono troppe: si eseguiranno due diverse ottimizzazioni, in ciascuna delle quali alcuni parametri saranno fissati, altri liberi, a turno. Per una soluzione approssimata è possibile, consigliabile e auspicabile considerare che i correnti siano soggetti alle sole due instabilità euleriana e locale. La geometria studiata è in fig. 5.1.

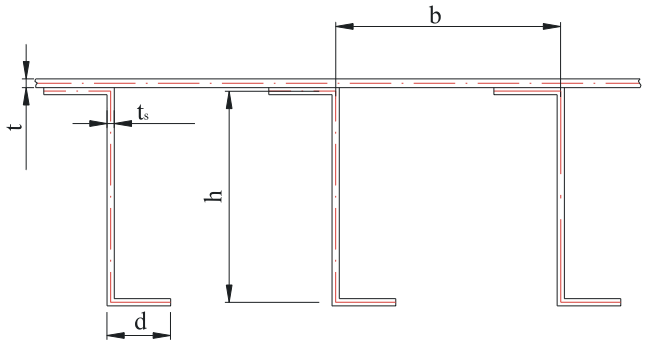


Figura 5.1: `Geometria del pannello in esame`

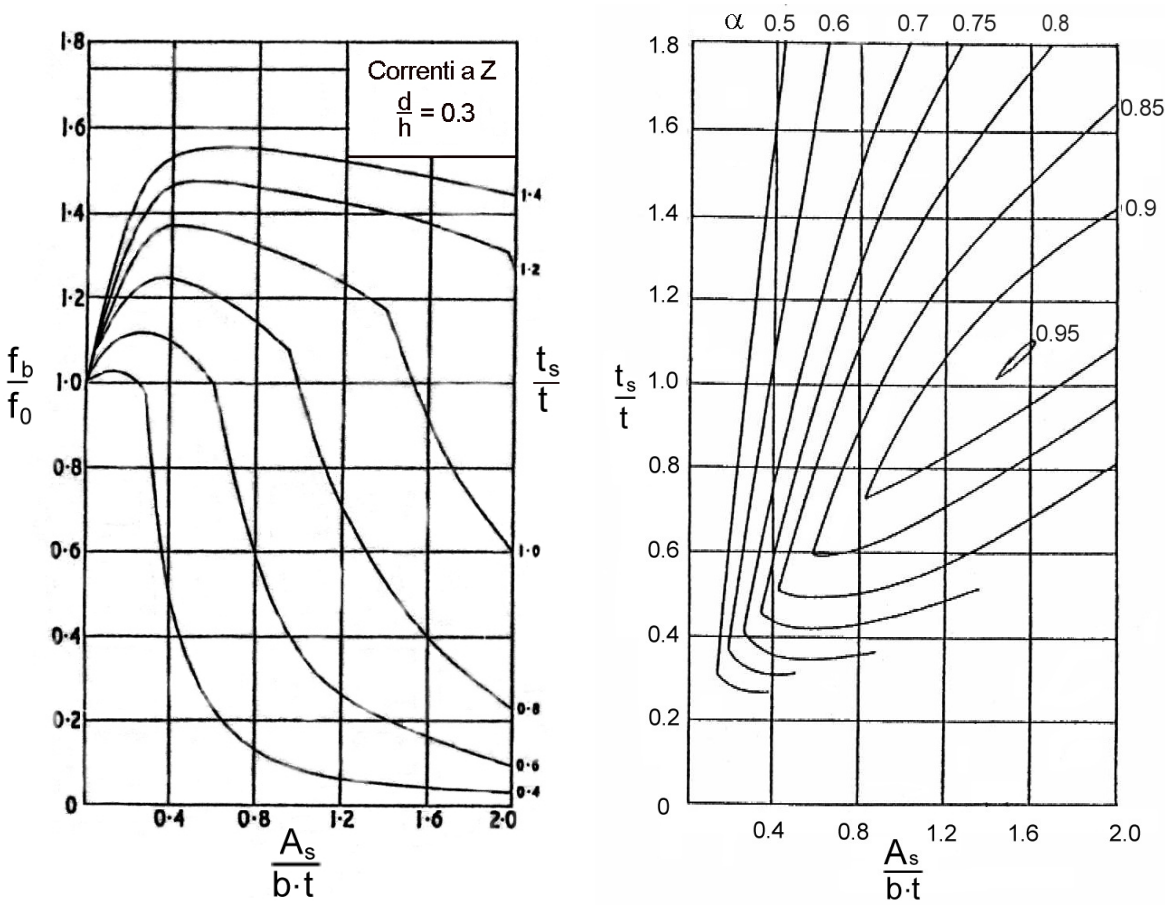
L'efficienza α può essere ricavata dal grafico di fig. 5.2(b) oppure scritta analiticamente:

$$\alpha = \sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{K}\sqrt{\frac{\rho\, t}{b\,\overline{t}}} \tag{5.5}$$

con

$$K = k_p \frac{f_b}{f_0}$$

in cui $k_p = \frac{4\pi^2}{12(1-\nu^2)} = 3.62$ (per piastre semplicemente appoggiate e $\nu = 0.3$); mentre $f_b/f_0 = f(A_s/b\,t, t_s/t)$ è estratto dal grafico di fig. 5.2(a). Il fattore k_p è quello della piastra singola, semplice; il fattore correttivo f_b/f_0 tiene conto della presenza degli irrigidimenti *dimensionati in modo tale che la loro tensione di instabilizzazione locale coincide con quella propria euleriana.* Ciò sottintende la



(a) Grafico di f_b/f_0

(b) Valori di α

Figura 5.2: `Entrambi i grafici sono tratti da [2]`

"formula di Bryan" per la tensione di instabilità locale:

$$\sigma_{cr} = KE\eta \left(\frac{t}{b}\right)^2 \tag{5.6}$$

Il grafico f_b/f_0, in base ai parametri coi quali viene letto, descrive il tipo di instabilità che insorge per prima: locale del pannello/euleriana del corrente, al primo tratto, oppure torsionale del corrente/laterale, al secondo tratto. Il grafico include già la geometria dei correnti, la quale è a "Z", con $d/h = 3/10$.

5.5.1 Determinazione di b ottimo assoluto ($\alpha = \alpha_{max}$

Si sceglie una forma a "Z" dotato di α_{max} teorico di 0.95. Ciò permette di ottenere dal grafico di α i valori di t_s/t e di $A_s/b\,t$ con cui entrare nel grafico di f_b/f_0 per ottenere quest'ultimo, che a sua volta procura K. A questo punto resta solo da calcolare dalla (5.6)

$$b_{ottimo} = t\sqrt{\frac{K\,E\,\eta}{\sigma}} \tag{5.7}$$

in cui η e σ sono stati determinati iterativamente come descritto a pag. 45.

5.5.2 Fissato in qualche modo b, si disegna la geometria ottimale della sezione

b_{ottimo} è troppo piccolo: considerazioni pratiche e tecnologiche consigliano di espanderne il valore ($b \sim 130$mm) e di mantenerlo costante sull'ala. Diventa allora possibile procedere a una nuova ottimizzazione per scegliere la geometria del pannello: t, t_s, h.

Si vuole ora creare una funzione $F_b\left(\frac{A_s}{bt}, \frac{t_s}{t}\right)$. Partendo dalla (5.7):

$$b^2 = K\,E\,\eta\,\frac{t^2}{\sigma}$$

Imponendo che σ sia massima:

$$\sigma = \sigma_o = \alpha\sqrt{\frac{NE\overline{\tau}}{L}}$$

Esprimendo $\sigma = N/\overline{t}$ e ponendo $\tau_* = \overline{\tau}^3/\eta^2$ si scrive

$$\frac{b^2}{L^2} = \frac{K}{\alpha^3}\left(\frac{t}{\overline{t}}\right)^2\sqrt{\frac{N}{E\tau_* L}} = \frac{K}{\alpha^3}\sqrt{\frac{N}{E\tau_* L}}\frac{1}{1+\frac{A_s}{bt}}$$

Siccome sia K sia α sono funzioni solo di $\frac{A_s}{bt}$ e $t_s t$ (vedi i grafici di fig. 5.2), si pone

$$F_b\left(\frac{A_s}{bt}, \frac{t_s}{t}\right) = \sqrt{\frac{K}{\alpha^3}\frac{1}{1+\frac{A_s}{bt}}} \tag{5.8}$$

cosicché

$$\frac{b}{L} = F_b\sqrt[4]{\frac{N}{E\,\tau_*\,L}} \tag{5.9}$$

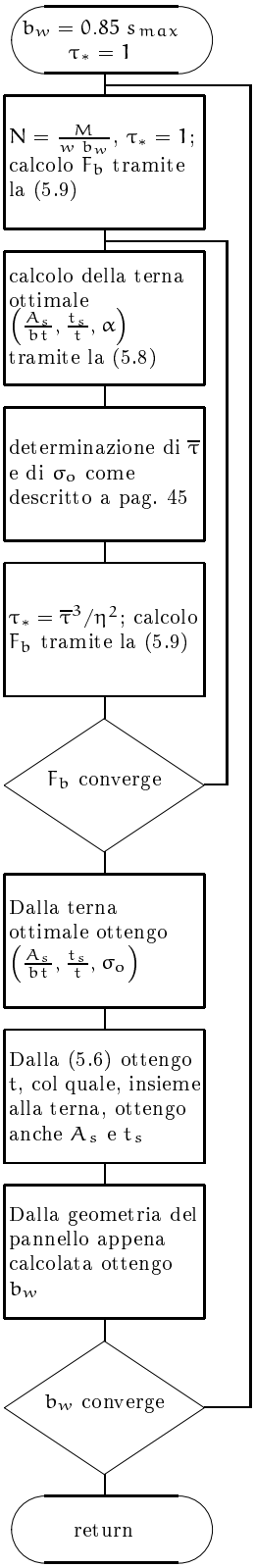
Dunque, se b, L, N, E, τ_* sono scelti, allora F_b è determinato dalla (5.9). Questo valore, insieme alla (5.8), permette di legare univocamente $\frac{A_s}{bt}$ con $\frac{t_s}{t}$, lasciando ∞^1 soluzioni; tra queste, va scelta quella con α maggiore.

Si è così determinata una terna ottimale $\left(\frac{A_s}{bt}, \frac{t_s}{t}, \alpha\right)$ e da questa anche σ_o. Dalla (5.6) ottengo t. Disponendo ora di t, $\frac{A_s}{bt}$, $\frac{t_s}{t}$, $\frac{d}{h}$, sono noti anche A_s e t_s e, tramite la relazione geometrica

$$A_s = h\,t_s\,\left(1+\frac{2d}{h}\right)$$

anche h e quindi la geometria completa del pannello.

Tutto ciò va ovviamente iterato su due livelli: per determinare $\sigma = f(\overline{\tau})$ e per identificare la coppia di parametri geometrici $\left(\frac{A_s}{bt}, \frac{t_s}{t}\right)$ cui corrisponde α_{max}.



⇐ Valori inziali per la geometria e pel materiale per far iniziare il ciclo

5.6 Cèntine

Le cèntine sono in maggior parte dette "di forma" e servono per irrigidire la struttura (ritardarne l'instabilità aumentando la tensione critica) e reggere i carichi aerodinamici, trasferendoli all'anime

dei longheroni. Cèntine di questo tipo sono spesso "flottanti", cioè collegate al rivestimento solo in corrispondenza dei suoi correnti.

Alcune cèntine (dette "di forza") introducono e diffondono come flussi di taglio nella struttura carichi concentrati grandi, in corrispondenza dei quali possono esserci dei montanti aggiuntivi. Queste cèntine sono solidamente collegate ai pannelli alari tramite shear-tie.

5.6.1 Le cèntine di forma, dimensionate a rigidezza, usate per ridurre la lunghezza libera d'inflessione dei pannelli alari

Se il numero di correnti è alto (almeno 3 o 4), si possono trascurare gli "effetti di bordo" e considerare il pezzo di rivestimento, compreso tra due correnti, di un pannello irrigidito, come una lastra soggetta a compressione sul lato corto b e di lunghezza L, delimitata dalle cèntine e semplicemente poggiata sui correnti.

Ciascuna cèntina, larga w e di rigidezza $(E\ J)_{rib}$, può essere intesa come supporto elastico di costante

$$k = \frac{\pi^4}{w^4}(EJ)_{rib} \tag{5.10}$$

alle estremità del pannello di rivestimento lungo L.[4] Inoltre, ciascuna porzione di lamiera larga $b = 1$, con un solo corrente, è analizzabile come una colonna compressa, posata su molle k spaziate L. La rigidità di queste colonne è allora, per unità di larghezza:

$$E\ J_* = \frac{(E\ J)_{lamiera+corrente}}{b = 1}$$

e poggia su molle di costante $k' = k/w$. Se le molle (cèntine) fossero appoggi rigidi, il carico critico $P_{cr} = c\ \frac{\pi^2 E\ J_*}{L^2}$ avrebbe il valore massimo[5] dato da $c = 1$ e corrispondente al carico critico euleriano $P_{eul} = \frac{\pi^2 E\ J_*}{L^2}$ di una colonna semplicemente poggiata alle estremità. Tuttavia, perché c raggiunga questo valore massimo non è necessario (né auspicabile ai fini del minimo peso) che $k \to \infty$.

Sperimentalmente si osserva una dipendenza dell'efficacia del vincolo da kL^3/B del tipo di fig. 5.3, in cui $B = E\ J_*$.

La struttura di supporto (cèntine, ecc.) dev'essere progettata in modo da non fornire rigidezza in più rispetto al minimo valore effettivamente richiesto per un collegamento rigido: una volta che k' è sufficiente a forzare i modi della deformata, *tutto il resto è grasso che cola.* Nella pratica, s'è visto che bastano 3 o 4 cèntine.

Lo spessore equivalente della cèntina è messo in conto tramite J_{rib}:

$$\bar{t}_{rib} = \frac{J_{rib}}{h\ \rho^2_{rib}}$$

In base al criterio di rigidezza $k\ L^3/B = 4\pi^2$ e alla definizione (5.10) di k:

$$\bar{t}_{rib} = \frac{4Bw^4}{\pi^2 h L^3}\frac{1}{(E\ \rho^2)_{rib}}$$

D'altra parte, $B = \frac{(E\ J)_{lam+corr}}{b}$ è dimensionato in base al carico critico euleriano:

$$P_{eul} = \frac{\pi^2 (E\ J)_{lam+corr}}{L^2} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{P_{eul} L^2}{\pi^2 b} \tag{5.11}$$

[4] L'espressione (5.10) è una conseguenza dell'equazione della linea elastica $(EJ)_{rib}\frac{d^4 v}{dy^4} = p$ e di aver assunto una deformata $v(y)$ semisinusoidale; dopodiché $k = p/v$.

[5] In realtà, un c più grande si potrebbe ottenere, ma solo utilizzando molle/vincoli torsionali.

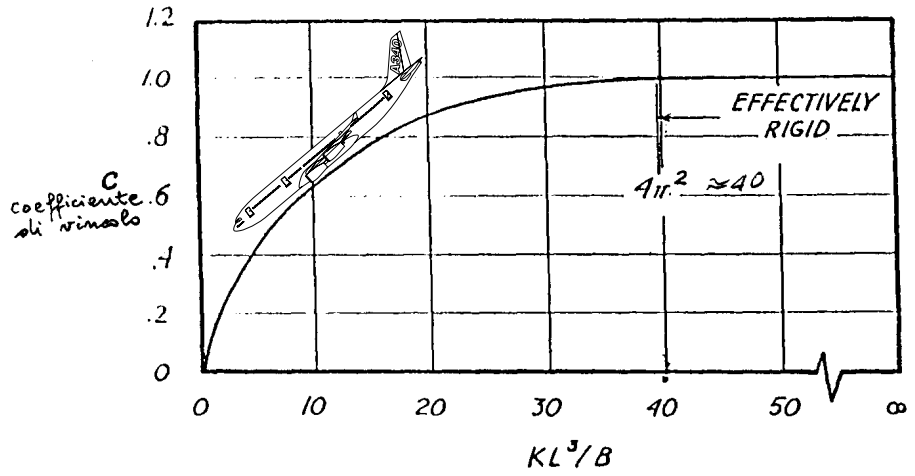


Figura 5.3: Il valore critico $4\pi^2$ fa da spartiacque tra due diverse instabilità: a sinistra ''globale'', in cui la semilunghezza d'onda della deformata del pannello è molto maggiore della spaziatura tra le cèntine, inefficaci; a destra ''locale'', in cui la deformata ha la semilunghezza uguale alla spaziatura tra le cèntine, ora efficaci nel forzare i nodi. L'instabilità globale è catastrofica perché corrisponde a tensioni molto più basse. Il valore critico $4\pi^2$ è appunto tale da dimensionare le cèntine in modo che le due instabilità si verifichino alla stessa tensione. Cfr. figg. 2.5 e 3.6 di [2]

Da queste formule si ottiene che

$$\bar{t}_{rib} = \frac{4w^4}{\pi^4 h} \frac{P_{eul}}{b(E\,\rho^2)_{rib}} \frac{1}{L}$$

ovvero

$$(\bar{t}_{rib})_{rigidezza} \propto 1/L$$

5.6.2 Dimensionamento a robustezza delle cèntine

S'intende che le cèntine debbono reggere i grossi carichi aerodinamici. Tralasciando i dettagli (troppo variabili con i criteri di progetto e con l'umore del progettista), è facile capire che il carico aerodinamico retto da *ciascuna* cèntina aumenta con la spaziatura tra di esse (L), e che perciò

$$(\bar{t}_{rib})_{robustezza} \propto L$$

5.6.3 Insomma, come scegliere $\bar{t}_{rib}$?

Esistendo criteri per cui $\bar{t}_{rib} \propto \frac{1}{L}$, ed altri per cui $\bar{t}_{rib} \propto L$, è evidente che esisterà un L_T per cui $\bar{t}_{rib}$ ha un minimo. Se nel dimensionare i pannelli (minimo peso ed altri criteri) risulta L (molto) diverso da L_T, il progettista non ha lavorato bene e deve rifare tutto.

5.6.4 Crushing della cèntina

Sotto l'effetto della pressione aerodinamica e/o del peso dell'ala, il cassone alare si flette e la trazione nel ventre e la compressione del dorso (o viceversa) cambiano direzione e introducono perciò sulla cèntina una sollecitazione nel suo piano.

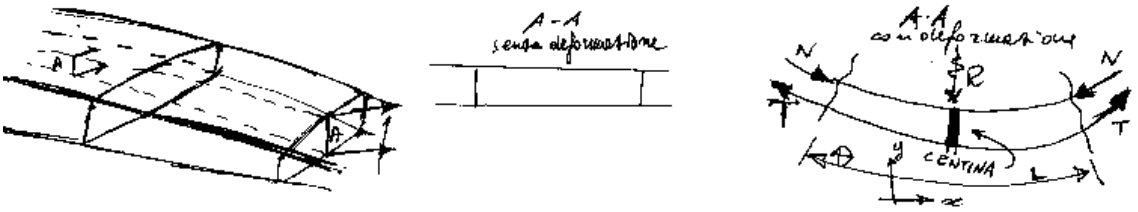


Figura 5.4: Crushing della cèntina

Queste forze sono analoghe a quelle introdotte dalla rastremazione, ma derivano da una piccola deformazione: in tal senso sono del secondo ordine. Con riferimento alla fig. 5.4, la deformazione fà sì che sulla cèntina (in direzione y ovvero radiale) si aggiunga una forza di compressione

$$F = N\vartheta = NL/R$$

che tende a instabilizzare l'anima della cèntina. Dall'equazione della linea elastica si ottiene la curvatura $\frac{1}{R} = -v''$:

$$M = -EJv'' \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M}{EJ}$$

L'anima della cèntina può allora instabilizzarsi per due cause: effetto del taglio (campo di tensione diagonale) o del crushing.

5.7 Non di sole cèntine è fatto un cassone

Per progettare a minimo peso l'intero cassone, si terrà conto sia del pannello alare sia delle cèntine. Può essere allora utile definire la solidità Σ di un cassone (o di una fusoliera) come il rapporto tra il volume di materiale (eventualmente pesato con le rispettive densità) ed il volume esterno occupato. In questo modo è possibile investigare sulla spaziatura L ottimale per avere minimo peso ovvero $\Sigma_m in$.

Il cassone è composto dal pannello irrigidito ($\bar{t}$) e dalle cèntine ($\bar{t}_{rib}$):

$$\Sigma = \frac{\bar{t}Lw + \bar{t}_{rib}hw}{hLw} = \frac{\bar{t}}{h} + \frac{\bar{t}_{rib}}{L}$$

Come già detto, h non è libero per l'ottimizzazione. S'è già visto che, se $\bar{t}$ è ottenuto con la coincidenza di tutti i modi di instabilità:

$$\bar{t} = \frac{N}{\sigma_o} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{NL}{E\bar{\tau}}}$$

pertanto $\bar{t} \propto \sqrt{L}$. Invece, la dipendenza di $\bar{t}_{rib}$ da L può variare a seconda dei criteri di progetto: $\bar{t}_{rib} \propto \frac{1}{L}$ (rigidezza), $\bar{t}_{rib} \propto L$ (robustezza) o anche $\bar{t}_{rib} \propto \sqrt{L}$ (dati empirici: [3, pp. 54–56]). Perciò è ovvio che L_{ott} vari a seconda del criterio e delle formule adottate.

La descrizione della confusione è qualcosa di diverso da una descrizione confusa
(Walter Benjamin)

In ogni caso, però, in queste formule di ottimo resta una dipendenza funzionale da N/h, che perciò è assunto come *parametro di progetto.* Infine, L_{ott} deve essere *compatibile con rigidezza e robustezza.*

5.8 Fusoliere: anche i cilindri circolari sono instabili, ma non ditelo a chi vola in 1ª classe

La spaziatura tra le ordinate della fusoliera non è una variabile da ottimizzare, perché è legata alla disposizione dei finestrini e dei seggiolini.

La tensione critica a flessione per un cilindro non irrigidito è

$$\sigma_{cr} = 2\, K_b\, \eta E\, \frac{t}{D} \propto E_s \frac{t}{D}$$

in cui K_b va determinato sperimentalmente e vale circa 0.36. In campo plastico, in prima approssimazione si può assumere una distribuzione fittizia lineare di tensione che arriva ad un massimo che vale

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J}\frac{D}{2} = \frac{4M}{\pi^2 D^2 t} \tag{5.12}$$

perchè il momento d'inerzia della corona circolare sottile vale $J = \frac{tD^3\pi}{8}$.

Differentemente che all'ala, a una fusoliera è permesso imbozzarsi, visti i minori disagi arrecati all'aerodinamica. Questa considerazione, unita al fatto che la spaziatura di minimo peso tra i correnti sarebbe molto piccola e perciò tecnologicamente ed economicamente sconveniente, porta a un certo... lassismo nella distribuzione dei correnti, accompagnato perciò da uno spessore maggiore del rivestimento.

Quando una fusoliera si instabilizza, forma tre semionde [3, fig. 7.2] nella parte compressa, di nodi distanti w:

$$w = \frac{\pi\, D}{3n} \tag{5.13}$$

in cui, se ϕ è l'angolo al centro che comprende le tre semionde, $n = \frac{2\pi}{2\phi}$, con $n \in [2.5, 5.5]$. Questi nodi possono considerarsi di semplice appoggio per la lamiera tra essi inclusa, delimitata dalle ordinate, ciascuna delle quali — simlmente a quanto visto per le cèntine a pag. 50 — oppone una resistenza elastica come fosse una molla di costante

$$k = (EJ)_F \frac{\pi^4}{w^4}$$

Assumendo, conservativamente, che un pannello irrigidito curvo si comporti come un pannello piano, vale lo stesso criterio

$$\frac{k\, L^3}{B} = 4\pi^2$$

e perciò, assumendo che $B = \frac{(E\,J)_{lam+corr}}{b}$ sia dimensionato in base al carico critico euleriano (come per la (5.11)), il criterio per la rigidezza delle ordinate che si ottiene è [3, pag. 122]

$$(E\ J)_F = \frac{4\, N_{cr}}{L}\left(\frac{w}{\pi}\right)^4 \tag{5.14}$$

Infine, unendo (5.12), (5.13), (5.14) e $N_{cr} = \sigma_{cr}\, \bar{t}$, si ottiene

$$(E\ J)_F = \frac{16}{81}\frac{M\ D^2}{\pi\, n^4 L}$$

che Gerard suggerisce di scrivere come

$$(E\ J)_F = C_f \frac{M\ D^2}{L}$$

perché C_f è determinabile empiricamente in modo tale che per un determinato piccolo intervallo di C_f accade la contemporanea instabilità del cilindro e dei pannelli (sperimentalmente $C_{f\,max} = 6.25 \times 10^{-5}$). Questo equivale a identificare n.

Capitolo 6

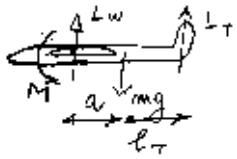
Carichi sugli aeroplani

6.1 Pillole introduttive

Spesso gli schemi stanno alla realtà come un astrologo ad un astronomo: male. Perciò schematizziamo innanzitutto i carichi in: • aerodinamici, • di massa, • del suolo.

Il fattore di carico è il rapporto $\frac{\text{forze aerodinamiche}}{\text{peso}}$ lungo la direzione di interesse. Ad es. • $n_z = 1$ è il volo livellato, • $n_z = 0$ è il volo in caduta libera (o in assenza di gravità simulata col volo parabolico), • $n_z = -1$ è il volo rovesciato.

Il carico in coda: è utile conoscerlo per stimare il momento sulla fusoliera, vista come trave incastrata nelle ali. Durante il volo ci sono variazioni e spostamenti del carico, soprattutto in coda, importanti per il progetto a fatica. L'**effetto dei flap sulla distribuzione di portanza** è duplice: • il centro di pressione si muove verso il retro del profilo, nella zona flappata; • la portanza aumenta, spostandosi verso la radice dell'ala, dove ci sono i flap. Per vedere **come varia il carico in coda** si può impostare l'equilibrio attorno al c.a. (per cui passa L_w)



$$M + a\ mg - L_T\ (a + l_T) = 0$$

$$\therefore \boxed{L_T = \frac{-M}{l_T + a} + \frac{a\ mg}{l_T + a}}$$

S'osservi che: • a può talvolta essere negativo • L_T varia col tempo: si consuma carburante (mg scende) e si svuotano i serbatoi (a varia); di solito il prodotto ma diminuisce • L_T varia colla velocità che, quando cresce, fa aumentare M. Tracciando un grafico (L_T, V) si ottengono diverse parabole:

$$L_T = -\frac{\frac{1}{2}\rho C_m \overline{c} S}{l_T + a} V^2 + \frac{a\ mg}{l_T + a}$$

Ci sono poi cause che fanno arretrare L_w e che quindi incrementano M, già picchiante di per sé: l'estensione dei flap e l'aumento della velocità (a pari portanza l'incidenza diminuisce). Allora:

Decollo: coda deportante (i flap sono parzialmente estesi)

Atterraggio: ancora di più!

Salita: la coda spesso è portante, pochino (la velocità è molto bassa e M è molto piccolo)

Crociera: la coda è deportante, leggermente, e lo è sempre di più col passare del tempo

Discesa: la velocità è bassa, la coda è portante

Pressurizzazione: Le FAR assegnano $p = 1.33 \times p_{valvola}$ ($p_{valvola}$ è la massima pressione raggiungibile) come pressione limite di progetto. I cicli di fatica da pressurizzazione sono pressoché ad ampiezza costante. Un cilindro omogeneo in pressione è in stato di tensione membranale ed ha tensioni multiassiali, con quella circonferenziale doppia di quella longitudinale:

$$\sigma_t = \frac{1}{2}\sigma_m = \frac{pR}{spessore}$$

Fatica acustica: è provocata specialmente dai motori, con frequenze da 50 a 15000Hz, quindi molto alte: *se* si manifesta fatica acustica, lo fa molto alla svelta!

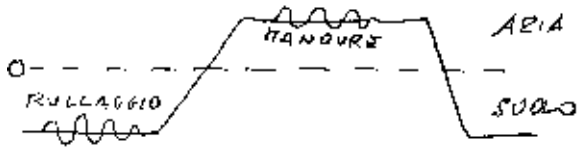


Figura 6.1: I carichi G.A.G. sono come dei macrocicli che si sovrappongono agli altri dovuti alle raffiche, alle manovre, al rullaggio, ecc. L'ampiezza è di circa due volte la tensione σ che si ha quando $n_z = 1$.

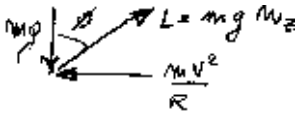
Carichi e fatica G.A.G.: qui G.A.G. non sta per Gambe-Addominali-Glutei da palestra ma per Ground-Air-Ground ovvero T.A.T. o S.A.S... Questi cicli portano le ali ad essere flesse verso il basso e verso l'alto (fig. 6.1).

6.2 Carichi da manovre

Carichi dovuti a manovre stazionarie:

Richiamata: l'accelerazione normale su una traiettoria circolare vale V^2/R, quindi la portanza deve reggere $m(V^2/R + g\cos\gamma)$ e il coefficiente di carico è $n_z = \frac{V^2}{Rg} + \cos\gamma$.

Virata corretta:



$$n_z = \sqrt{1 + \left(\frac{V^2}{Rg}\right)^2}$$

$$n_z \cos\phi = 1$$

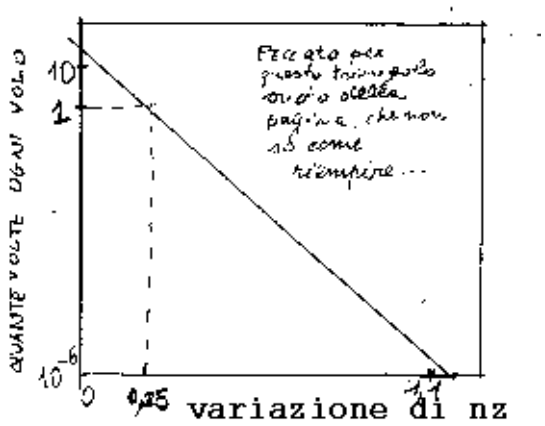


Figura 6.2: Eccedenze di carico: in ascissa c'è il Δn_z che ci si aspetta ripetersi tot volte per volo (in ordinata)

Manovre e eccedenze di carico: la fig. 6.2 è un esempio di grafico di "eccedenze di carico" dovute alle manovre per un aereo civile. È una retta su un diagramma semilogaritmico. In codesto esempio, ci si aspetta *una* manovra con $n_z = 1.25$ per ciascun volo. Si osserva che n_z molto alti hanno probabilità molto basse. Grafici simili ma comprendenti anche $n_z < 0$ esistono per aerei da combattimento; in questi casi gli n_z sono molto più alti e le frequenze pure.

Questi grafici, come s'è detto, riguardano solo i carichi da manovra. Quando la specifica assegna una missione, da essa si può ricavare una storia di carico e quindi un diagramma delle eccedenze.

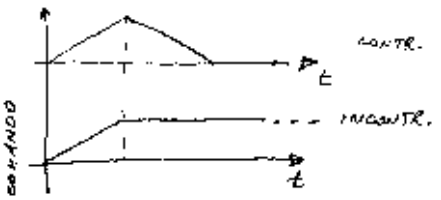


Figura 6.3: La manovra è controllata o incontrollata, a seconda che il comando viene o no riportato nella posizione iniziale

Le manovre brusche: Sono quelle in cui i comandi vengono mossi rapidamente. Sono schematicamente divise in *controllate* e *incontrollate* (a seconda del grado di *terrore* che assale il pilota) e matematicamente descritte come in fig. 6.3. Le FAR prescrivono che tutti i tipi di manovra fisicamente realizzabili muovendo (anche in modo folle) i comandi ricadano nel diagramma di manovra (sta dunque al progettista... progettare bene i comandi), es. in fig. 6.4.[1]

6.3 Carichi da raffiche

Più l'aeroplano è piccolo e più questi sono i carichi critici, per quanto la reazione di un velivolo quando incontra raffiche è molto più controllata di quella dei passeggeri. Come per tutte le cose in ingegneria, esiste un modello matematico delle raffiche. Esse sono svariatissime ma, una volta che il velivolo sorvola la FARlandia, ne incontra solo alcune. Lì, le raffiche laterali sono come quelle verticali e hanno

[1] Le FAR ancora non hanno regolato il caso di un pilota suicida.

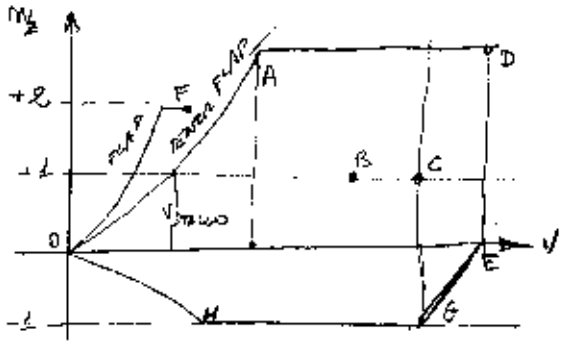


Figura 6.4: Esempio di diagramma di manovra

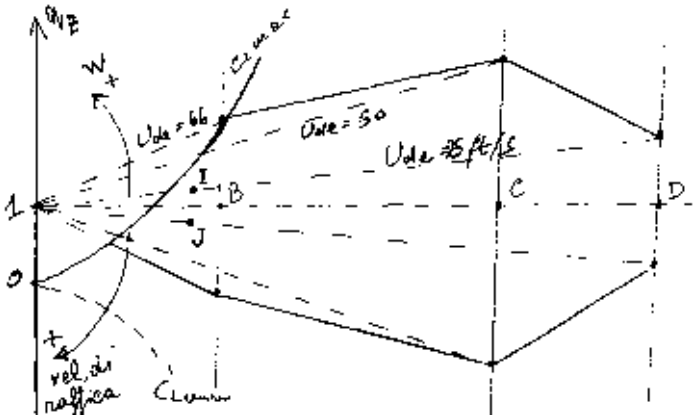


Figura 6.5: Esempio di diagramma di raffica --- l'equazione di ciascuna retta viene perché $n(t=0)=1$ dalla (6.1): $n = 1 \pm \frac{k_g \rho_0 C_{l\alpha} V_E U_{de}}{2W/S}$

tutte la stessa forma, detta "uno meno coseno" (fig. 6.6) di equazione $w_g = \frac{1}{2} U_{de} \left(1 - \cos \frac{2\pi\tau}{H}\right)$, più

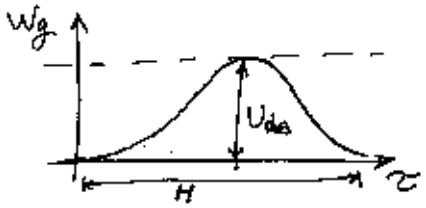


Figura 6.6: Schema di una raffica ''uno meno coseno''

realistica di una raffica a gradino (fig. 6.7).

τ è l'ascissa spazio-temporale, adimensionale, che misura l'avvicinamento del velivolo alla raffica:

$$\tau \triangleq \frac{tV}{c}$$

in quanto è il numero di corde c percorse nel tempo t alla velocità V. Anche l'estensione della raffica è misurata senza dimensioni come numero di corde percorse ($H = 25$).

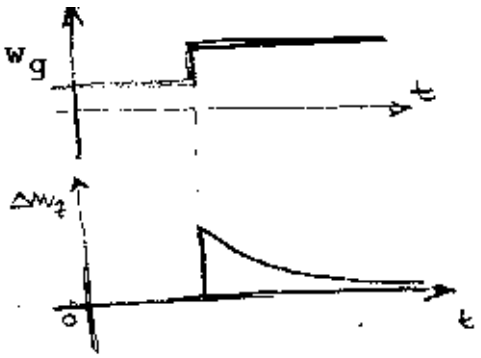


Figura 6.7: In risposta a una raffica ideale a gradino, il coefficiente di carico avrebbe un salto brusco, quindi tenderebbe a riportarsi al valore prima della raffica, perché l'aeroplano asintoticamente verrebbe trascinato verticalmente con la velocità di raffica

Relazione tra n_z e la velocità di raffica w_g: a w_g corrisponde una variazione incipiente di incidenza

$$\Delta\alpha_0 = w_g/V$$

con una successiva variazione incipiente di portanza

$$\Delta L_0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha}\,\Delta\alpha_0$$

cui corrisponde una salita verticale a velocità $w(t)$ dell'aereo e quindi un

$$\Delta\alpha(t) = \frac{w_g - w(t)}{V}$$

L'equazione del moto $F = ma$ diventa

$$F = F_{peso} + F_{aerodinamica} = -mg + L + \Delta L = m\frac{dw}{dt}$$

e quindi

$$\Delta L = m\frac{dw}{dt}$$

La variazione Δn_z è per definizione il rapporto tra la variazione di forze aerodinamiche (ΔL) e il peso:

$$\Delta n_z = \frac{\Delta L}{mg} = \frac{m\dot{w}}{W} = \frac{1}{2}\rho V\frac{S}{W}C_{L\alpha}(w_g - w(t)) \tag{6.1}$$

Rispetto al massimo Δn_z^* che si ottiene con $w = 0$, il Δn_z che corrisponde alla nostra raffica può essere espresso tramite un fattore di attenuazione della raffica $k_g < 1$ che normalizza il valore rispetto al suo massimo:

$$\Delta n_z = k_g\,\Delta n_z^*$$

Per la raffica "1-cos" con $H = 25$ si ha

$$k_g = \frac{0.88\mu_g}{5.3 + \mu_g}$$

cioè k_g è funzione della massa adimensionale

$$\mu_g \triangleq \frac{m}{\frac{1}{2}\rho S C_{L\alpha} c}$$

Resta indeterminato il valore di U_{de}, ovvero di w_g, che entra nel calcolo di Δn_z^*. In FARlandia le velocità di raffica di progetto U_{de} sono velocità equivalenti assegnate, descrescenti con la velocità equivalente del velivolo e con la quota per motivi statistici,[2] come si riscontra nel diagraffa di raffica 6.5.

Le raffiche frontali producono un aumento relativo nella pressione dinamica pari a

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{(V+w)^2 - V^2}{V^2} \approx \frac{2w}{V}$$

importante solo a basse velocità.

6.3.1 Descrizione statistica delle raffiche

Si cerca di collezionare quanti più dati possibile in grafici (velocità di raffica $[U_{de}]$, numero di eccedenze di queste ogni miglio [N]) e di interpolare i dati con:

$$N = \underbrace{B_1 e^{-U_{de}/a_1}}_{\text{componente non temporalesca}} + \overbrace{B_2 e^{-U_{de}/a_2}}^{\text{componente temporalesca}}$$

in cui B_1, B_2, a_1, a_2 sono funzioni dell'altitudine, interpretabili come segue:

B_1 grande/piccolo $\leftrightarrow$ molte/poche raffiche
B_2 grande/piccolo $\leftrightarrow$ molti/pochi temporali
a_1 grande/piccolo $\leftrightarrow$ raffiche molto/poco intense
a_2 grande/piccolo $\leftrightarrow$ temporali intensi/deboli

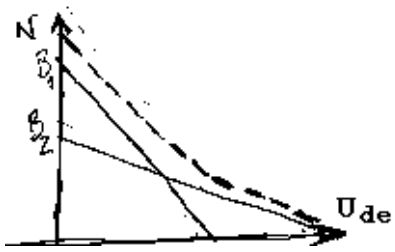


Figura 6.8: Grafico semilogaritmico; in ascissa c'è la velocità equivalente. La quota è fissata. La linea tratteggiata è spezzata perché la curva non esiste per $N < 0$. Un grafico completo riporta una di queste curve per ciascuna quota

In un grafico semilogaritmico come in figura 6.8, al diminuire dell'altitudine le rette si alzano, soprattutto per via della componente temporalesca.

[2] In FARlandia, realtà e probabilità coincidono.

6.4 Come sono distribuiti i carichi lungo l'ala

L'ala è vista come una trave incastrata nella C.L. (non nella fusoliera). I carichi di massa (peso dell'ala, motori, carburante) sono tutti moltiplicati per n_z. Il peso del carburante va con l'inverso del quadrato dell'apertura (è in fatti proporzionale al volume del serbatoi); ecco perché, per quanto sarebbe benefico per le sollecitazioni dell'ala mettere carburante alle estremità, ciò non viene fatto per via della bassa efficienza ponderale (il volume del cassone alare è molto basso alle estremità). L'illustrazione 7 di [1], che mostra un carico *lineare* lungo l'ala in corrispondenza dei serbatoi, è quindi sbagliata. Qualitativamente è come in fig. 6.9.

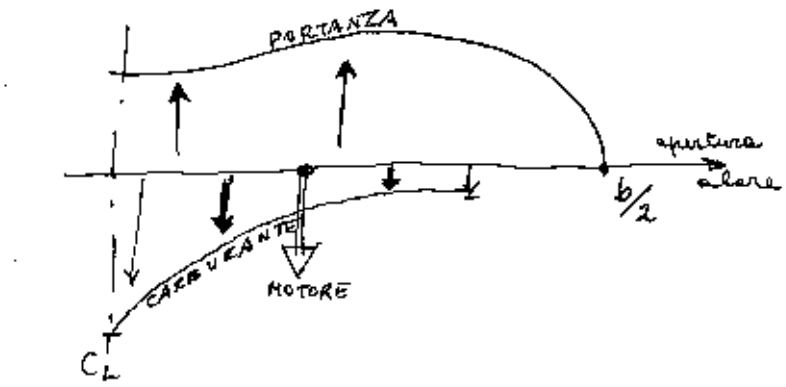


Figura 6.9: `Distribuzione qualitativa dei carichi sull'ala`

6.5 Carichi del suolo

Un carrello con sospensione oleo-pneumatica assorbe energia col meccanismo del trafilamento viscoso dell'olio e ammortizza tramite i pneumatici e il gas comprimibile del pistone. Durante l'atterraggio, il pistone scorre e la forza esercitata varia; il progettista deve limitarla in modo che il passeggero non senta un n_z indesiderato a fronte di velocità di affondo assegnate dalle FAR. La forza di affondo è data da due componenti (fig. 6.10):

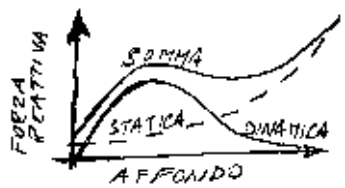


Figura 6.10: `Schema delle forze esercitate dal carrello`

1. tratteggiata, detta statica: è un'iperbole perché è dovuta a una compressione ideale molto lenta, in cui la reazione è solo quella di pressione di un gas ideale: pressione $\times$ volume = costante;
2. continua, detta dinamica: è dovuta all'attrito dell'olio ed è proporzionale alla velocità di affondo che raggiunge presto un massimo.

Bibliografia

[1] J. B. de Jonge. An introductory course on aircraft loading. Lecture notes for a summer course given at the Technical University of Bandung (ITB), 1984.

[2] D. J. Farrar. The design of compression structures for minimum weight. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, pagine 1041–1052, 1949.

[3] George Gerard. *Minimum Weight Analysis of Compression Structures.* New York University Press.

[4] Giacomo Leopardi. *Zibaldone.*

[5] Leo Longanesi. *La sua signora.*

[6] Alessandro Morandotti. *Minime.* 1979.